

I. SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice II.1 – (Sous-espaces vectoriels) [CORRECTION P. 8]

Parmi les sous-ensembles E_i de E ci-dessous dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels.

1. $E = \mathbb{R}^4$.

a. $E_1 = \{(x, y, z, t) \in E / x = 1\}$.

c. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in E / y = z = t = 0\}$.

b. $E_2 = \{(x, y, z, t) \in E / x = 0\}$.

d. $E_4 = \{(x, y, z, t) \in E / x \neq y\}$.

2. E espace vectoriel de dimension finie tel que $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a. $E_1 = \{f \in E / f \text{ dérivable}\}$.

c. $E_3 = \{f \in E / f \text{ discontinue}\}$.

b. $E_2 = \{f \in E / f \text{ continue}\}$.

d. $E_4 = \{f \in E / f \text{ croissante}\}$.

3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in E / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

b. $E_2 = \{A \in E / AB = BA, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$.

c. $E_3 = \{A \in E / A^2 = A\}$.

4. Soit $E = \mathbb{R}_5[x]$.

a. $E_1 = \{P \in E / P(0) = 0\}$.

b. $E_2 = \{P \in E / \deg(P) \geq 3\}$.

Exercice II.2 – (Pas des sous-espaces vectoriels!)

Dans chaque cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E . Justifier pourquoi.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1\}$

2. $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) / y = x^2 \right\}$

3. $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M^2 = 0_2\}$

Exercice II.3 – (L'ensemble des matrices symétriques) [CORRECTION P. 9]

Soit $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices symétriques sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Rappeler la définition d'une matrice symétrique et donner la forme générale des éléments de $\mathcal{S}_2$.
- Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice II.4 – (Combinaisons linéaires, colinéarité) [CORRECTION P. 9]

1. Dans $\mathbb{R}^2$,

a. $(3, 7)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 1)$ et $(2, 3)$?

b. $(1, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(2, 1)$ et $(3, 1)$?

- c. $(1, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(2, 1)$, $(3, 1)$ et $(2, 4)$?
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $(2, 4, 2)$ est-il combinaison linéaire de $(2, 1, 2)$, $(1, 1, 2)$ et $(0, 1, 1)$?
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
4. Dans $\mathbb{R}_3[x]$, donner deux vecteurs colinéaires ?
5. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner deux vecteurs colinéaires ?
6. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto e^x$ sont-elles colinéaires ? Les fonctions $x \mapsto 3^x$ et $x \mapsto 3^{x+1}$ sont-elles colinéaires ?
7. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donner deux vecteurs colinéaires.

Exercice II.5 – (Familles libres, familles génératrices, bases) [CORRECTION P. 12]

Parmi les familles de vecteurs de E ci-dessous dire lesquelles sont libres, génératrices ou forment une base.

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$.
 - a. $E_1 = ((1, 0, 1), (-1, 1, 2), (-2, 1, 2))$.
 - b. $E_2 = ((1, 0, 1), (-1, 1, 2), (0, 1, 3))$.
 - c. $E_3 = ((1, 0, 1), (2, 0, 3))$.
 - d. $E_4 = ((1, 0, 1), (2, 0, 3), (-1, 1, 1), (0, 0, 1))$.
2. $E = \mathbb{R}_3[x]$.
 - a. $E_1 = (\mathbb{1}, X - 2\mathbb{1}, (X - 2\mathbb{1})^2)$.
 - b. $E_2 = (3\mathbb{1}, X^2, -X^3, X)$.
3. E est un espace vectoriel de dimension 5 avec $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que E_1 et E_2 sont des familles d'éléments de E et $E_1 = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ où, $\forall i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, f_i est la fonction définie par $f_i(x) = e^{ix}$.
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - a. $E_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
 - b. $E_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
 - c. $E_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$.
5. $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $E_1 = (A, A^2)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice II.6 – (Sous-espaces vectoriels engendrés, base et dimension) [CORRECTION P. 17]

1. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ puis donner leur dimension :
 - a. $A = \text{Vect}((1, 2), (-3, -6))$.
 - b. $B = \text{Vect}((1, 2), (3, 4), (5, 6))$.
2. Déterminer une base de $A = \text{Vect}((1, 3, -3), (4, 2, -3), (-1, 7, 6))$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est alors la dimension de A ?
3. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ puis donner leur dimension :
 - a. $A = \text{Vect}((1, 2, -3, 4), (2, 4, -5, 1), (-2, -1, 2, 0), (3, 0, -1, -4))$.
 - b. $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 2y - z, t = x + y + z\}$.
4. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(X - \mathbb{1}, (X - \mathbb{1})^2)$ de $\mathbb{R}_3[x]$ puis donner sa dimension.
5. On suppose que la famille $\left(\left(\left(\frac{1}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ appartienne à un espace vectoriel de dimension finie E , $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Déterminer une base du sous-espace vectoriel $\text{Vect} \left(\left(\left(\frac{1}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ de E puis donner sa dimension.

Exercice II.7

Dans chaque cas, démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base et préciser sa dimension.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$
4. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 0_{3,1}\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
5. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = X\}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$
7. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice II.8 – (Rang d’une famille de vecteurs) [CORRECTION P. 19]

Calculer le rang des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ ci-dessous.

1. $A = ((1, 2, -4, 3), (2, 5, -3, 4), (6, 17, -7, 10), (1, 3, -3, 2))$.
2. $B = ((1, 2, 6, -1), (3, 6, 5, -6), (2, 4, -1, -2))$.

Exercice II.9 – (Base d’une intersection de sous-espaces vectoriels) [CORRECTION P. 20]

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + z = 0\}.$$

Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice II.10 – (EV de fonctions polynomiales)

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / \forall x \in \mathbb{R}, P(x) - xP'(x) = 0\}$.

Justifier que E est un espace vectoriel et en déterminer une base ainsi que la dimension.

Exercice II.11 – (Recherche de bases) [CORRECTION P. 20]

1. On considère les quatre fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_0(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P_2(x) = x(x-1)(x-3)$$

$$P_1(x) = x(x-2)(x-3)$$

$$P_3(x) = x(x-1)(x-2).$$

Démontrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. On considère les cinq fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = \ln(x) & f_3(x) = e^x & f_5(x) = \frac{1}{x} \\ f_2(x) = x & f_4(x) = e^{x+3} & \end{array}$$

On suppose que ces fonctions appartiennent à un espace vectoriel E de dimension 6 telle que $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

- La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est-elle une famille libre de E ?
 - Déterminer une base de $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.
3. On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

On note a et b les éléments de E tels que : $a_0 = 1, a_1 = 0$ et $b_0 = 0, b_1 = 1$. Enfin, on note $r = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $s = (3^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2 dont (r, s) est une base.
- Montrer que (a, b) est une base de E .

Exercice II.12 – (Coordonnées dans une base) [CORRECTION P. 22]

- Dans $\mathbb{R}^4$, on note $a = (1, 2, 3, 4), b = (0, 1, 1, 1), c = (1, 1, 0, 2), d = (1, 1, 2, 0)$.
 - Vérifier que $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
 - On pose $x = (1, 1, 1, 1)$. Déterminer les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right)$.
 - Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Donner les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.
 - Donner les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- On pose $\mathcal{F} = ((X - 1)(X + 1), (X + 1)(X - 2), (X - 1)(X - 2))$.
 - Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.
 - En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
 - Donner les coordonnées de X dans cette base.

Exercice II.13 – (Cas d'égalité de deux sous-espaces vectoriels à partir des dimensions) [CORRECTION P. 24]

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $a = (1, 1, 3), b = (1, 0, 2), c = (2, 1, 5), d = (3, 2, 8)$, ainsi que $E_1 = \text{Vect}(a, b)$ et $E_2 = \text{Vect}(c, d)$.

- Déterminer $\dim(E_1)$ et $\dim(E_2)$.
- Vérifier que $(c, d) \in (E_1)^2$.
- En déduire que $E_1 = E_2$.

Exercice II.14 – (Base d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) [CORRECTION P. 24]

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a + 2b & -b & -2b \\ 2b & a - b & -4b \\ -b & b & a + 3b \end{pmatrix}.$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$ i.e. $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

II. POUR S'ENTRAÎNER

Exercice II.15 – (Bases particulières de $\mathbb{R}_n[x]$)

1. Soit $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes tels que $\deg(P_i) = i, \forall i \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, (P_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$. On note, $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P_i = (X - a\mathbb{1})^i (X - b\mathbb{1})^{n-i}$.

Montrer que la famille $(P_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, \dots, a_n$ réels distincts deux à deux.

Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on appelle i -ème polynôme d'interpolation (ou interpolateur) de Lagrange associé aux réels $a_0, \dots, a_n$ le polynôme

$$L_i = \prod_{\substack{j \in \llbracket 0; n \rrbracket \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

- a. Donner le degré de L_i pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- b. Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} = \delta_{i,k} \quad (\text{Symbole de Kronecker}).$$

- c. Montrer que la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

- d. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x], P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$.

Exercice II.16 – (Matrices symétriques et antisymétriques)

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ ainsi que les ensembles :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^t M = M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n symétriques
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^t M = -M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n antisymétriques

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base de chaque ainsi que la dimension.
2. Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists! (S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) / M = S + A.$$

Exercice II.17 – (Base d'un sous-espace vectoriel particulier de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

Soit $\mathcal{E} = \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \sum_{i=1}^3 m_{i,i} = 0 \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de $\mathcal{E}$ ainsi que sa dimension.

Exercice II.18 – ((*) Centre d'une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle commutant de $\mathcal{E}$ la partie $C(\mathcal{E})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée des matrices qui commutent avec toute matrice de $\mathcal{E}$, i.e. $C(\mathcal{E}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall M \in \mathcal{E}, AM = MA\}$.

1. Vérifier que, pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer $C(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}I_n$ où $\mathbb{R}I_n = \{aI_n, a \in \mathbb{R}\}$.

On pourra utiliser les matrices élémentaires $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice II.19

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / JMJ = M\}$.

Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

III. CONCOURS

Exercice II.20 – (Classique !)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. En déterminer une base et la dimension.
3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Vérifier que $AV \in \text{Vect}(U, V)$.
 - b. Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 - c. Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
 - b. Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$ et vérifier que $T = 2b_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.
 - a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN.$$

c. Démontrer que $\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / NQ = QN\} = \text{Vect}(I_3, N, N^2)$.

d. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.

6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / M^2 + I_3 = A\}$.

a. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?

b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N.$$

c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.

d. En déduire, à l'aide de la question 5.c., les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.

e. Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

CORRIGÉS

Correction de l'exercice II.1 : [ÉNONCÉ]

💡 Idée

E_2 est aussi l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

💡 Idée

Même chose pour E_3 .

📖 Rappel

$0_E = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(x) = 0$.

📖 Rappel

$0_E = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = 0_2$ est la matrice nulle carrée d'ordre 2.

1. a. $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0) \notin E_1$ donc E_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} \text{b. } E_2 &= \{(x, y, z, t) \in E / x = 0\} \\ &= \{(0, y, z, t) \in E / (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{y(0, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1) / (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)). \end{aligned}$$

Par définition du sous-espace vectoriel engendré, E_2 est, en particulier, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} \text{c. } E_3 &= \{(x, y, z, t) \in E / y = z = t = 0\} = \{(x, 0, 0, 0) \in E / x \in \mathbb{R}\} \text{ Donc, } E_3 \text{ est un} \\ &= \{(x, 0, 0, 0) \in E / x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0, 0) / x \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0, 0)). \end{aligned}$$

sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- d. $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0) \notin E_4$ donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. a.

- Par définition tout élément de E_1 est élément de E i.e. $E_1 \subset E$.
- La fonction nulle est dérivable sur $\mathbb{R}$ soit $0_E \in E_1$ i.e. $E_1 \subset E$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in (E_1)^2$, montrons que $\lambda f + g \in E_1$.

On sait que si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors par produit par un réel, λf est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où $\lambda f + g$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ i.e. $\lambda f + g \in E_1$.

En conclusion, E_1 est bien un sous-espace vectoriel de E .

- b. On reprend la démonstration ci-dessus en remplaçant « dérivable » par « continue ».
- c. La fonction nulle n'est pas discontinue donc $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} = 0_E \notin E_3$ et E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E .
- d. Pour toute fonction strictement croissante, $(-1)f$ ne l'est pas donc E_4 n'est pas stable par la loi externe i.e. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

$$\begin{aligned} \text{3. a. } E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in E / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- b.

- Par définition, tout élément de E_2 est une matrice carrée d'ordre 2 donc élément de E i.e. $E_2 \subset E$.
- $\forall B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), 0_2 B = 0_2 = B 0_2$ soit $0_2 \in E_2$ et $E_2 \neq \emptyset$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(M, N) \in (E_2)^2$. Montrons que $\lambda M + N \in E_2$ i.e. $(\lambda M + N)B = B(\lambda M + N), B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, $\lambda M + N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Par définition de E_2 , $MB = BM$ et $NB = BN$.

Ainsi $(\lambda M + N)B = \lambda MB + NB = \lambda BM + BN = B(\lambda M + N)$ après développement puis factorisation par B à gauche.

On a bien montré que $\lambda M + N \in E_2$.

E_2 est bien un sous-espace vectoriel de E .

c. Soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Un simple calcul montre que $(2I)^2 = 4I \neq (2I)$ et $2I \notin E_3$ i.e. E_3 n'est pas stable pour la loi de composition externe.

En conclusion, E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

4. a.

— Par définition, tout élément de E_1 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 5 donc élément de E i.e. $E_1 \subset E$.

— $0_{\mathbb{R}[x]}(0) = 0$ soit $0_{\mathbb{R}[x]} \in E_2$ i.e. $E_1 \neq \emptyset$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in (E_1)^2$, montrons que $\lambda P + Q \in E_1$ i.e. $(\lambda P + Q)(0) = 0$.

$P \in E_1$ équivaut à $P(0) = 0$ et $Q \in E_1$ équivaut à $Q(0) = 0$ donc $(\lambda P + Q)(0) = (\lambda P)(0) + Q(0) = \lambda P(0) + Q(0) = \lambda(0) + 0 = 0$ et $\lambda P + Q \in E_1$.

En conclusion, E_1 est bien un sous-espace vectoriel de E .

b. $\deg(0_{\mathbb{R}[x]}) = -\infty$ donc $0_{\mathbb{R}[x]} = 0_E \notin E_2$ donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Correction de l'exercice II.3 : [ÉNONCÉ]

1. $\mathcal{S}_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / {}^tM = M\}$

$$= \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

2. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Autre méthode générale pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

— Tout élément de $\mathcal{S}_2$ est une matrice carrée d'ordre n donc élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i.e. $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— La matrice nulle vérifie ${}^t0_n = 0_n$ soit $0_n \in \mathcal{S}_2$ i.e. $\mathcal{S}_2 \neq \emptyset$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in \mathcal{S}_2^2$, montrons que $\lambda M + N \in \mathcal{S}_2$ i.e. ${}^t(\lambda M + N) = (\lambda M + N)$.

Par linéarité de la transposée, ${}^t(\lambda M + N) = {}^t(\lambda M) + {}^tN = \lambda({}^tM) + {}^tN = \lambda M + N$.

On a bien montré que $\lambda M + N \in \mathcal{S}_2$.

En conclusion, $\mathcal{S}_2$ est bien un sous-espace vectoriel de E .

Correction de l'exercice II.4 : [ÉNONCÉ]

1. a. Supposons qu'il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(3, 7) = a(1, 1) + b(2, 3)$.

Alors,

$$(3, 7) = a(1, 1) + b(2, 3) \iff (3, 7) = (a, a) + (2b, 3b) = (a + 2b, a + 3b).$$

Rappel

$0_E = 0_{\mathbb{R}_5[x]} = 0_{\mathbb{R}[x]}$ est la fonction polynôme nulle définie sur $\mathbb{R}$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}[x]}(x) = 0$.

Méthode

La méthode est sensiblement toujours la même : on suppose l'existence de scalaires satisfaisant la combinaison linéaire puis on vérifie la validité de cette hypothèse.

Or, deux couples sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \\ a + 3b = 7 \end{cases} & \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{cases} a + 2b = 3 \\ b = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

On peut donc dire que $(3, 7)$ est bien combinaison linéaire de $(1, 1)$ et $(2, 3)$:

$$(3, 7) = (-5) \cdot (1, 1) + 4 \cdot (2, 3).$$

b. Même chose. Supposons qu'il existe un couple (a, b) tel que : $(1, 1) = a(2, 1) + b(3, 1)$.

$$\begin{aligned} (1, 1) = a(2, 1) + b(3, 1) & \Leftrightarrow (1, 1) = (2a, a) + (3b, b) \\ & \Leftrightarrow (1, 1) = (2a + 3b, a + b) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1} \begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ -b = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut donc dire que $(1, 1)$ est bien combinaison linéaire de $(2, 1)$ et $(3, 1)$:

$$(1, 1) = 2 \cdot (2, 1) + (-1) \cdot (3, 1).$$

c. Supposons qu'il existe un triplet (a, b, c) tel que :

$$\begin{aligned} (1, 1) = a(2, 1) + b(3, 1) + c(2, 4) & \Leftrightarrow (1, 1) = (2a, a) + (3b, b) + (2c, 4c) \\ & \Leftrightarrow (1, 1) = (2a + 3b + 2c, a + b + 4c) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 2c = 1 \\ a + b + 4c = 1 \end{cases} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_2]{L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_2} \begin{cases} a + b + 4c = 1 \\ b - 6c = -1 \end{cases} \\ & \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2} \begin{cases} a + 10c = 2 \\ b - 6c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 10c \\ b = -1 + 6c. \end{cases} \end{aligned}$$

Ici, on a le choix des valeurs de a et b en fonction de celles de c .

On a donc une infinité de façon d'exprimer $(1, 1)$ comme combinaison linéaire de la famille $((2, 1), (3, 1), (2, 4))$.

Par exemple,

$$\begin{aligned} - \text{ si } c = 1 \text{ alors } a = -8, b = 5 \text{ et } (1, 1) &= (-8) \cdot (2, 1) + 5 \cdot (3, 1) + 1 \cdot (2, 4). \\ - \text{ si } c = 0 \text{ alors } a = 2, b = -1 \text{ et } (1, 1) &= 2 \cdot (2, 1) + (-1) \cdot (3, 1). \\ - \text{ si } c = \frac{1}{5} \text{ alors } a = 0, b = \frac{1}{5} \text{ et } (1, 1) &= \frac{1}{5} \cdot (3, 1) + \frac{1}{5} \cdot (2, 4). \\ - \text{ si } c = \frac{1}{6} \text{ alors } a = \frac{1}{3}, b = 0 \text{ et } (1, 1) &= \frac{1}{3} \cdot (2, 1) + \frac{1}{6} \cdot (2, 4). \\ - \dots \end{aligned}$$

2. Supposons qu'il existe un triplet (a, b, c) tel que :

$$\begin{aligned}
 (2, 4, 2) = a(2, 1, 2) + b(1, 1, 2) + c(0, 1, 1) &\iff (2, 4, 2) = (2a + b, a + b + c, 2a + 2b + c) \\
 &\iff \begin{cases} 2a + b = 2 \\ a + b + c = 4 \\ 2a + 2b + c = 2 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = 2 \end{cases} \\
 &\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2a + b = 2 \\ a + b = -2 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{cases} a + b + c = 4 \\ a = 4 \\ a + b = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 6 \\ a = 4 \\ a + b = -2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a = 4 \\ b = -6 \\ c = 6. \end{cases}
 \end{aligned}$$

On peut donc dire que $(2, 4, 2)$ est bien combinaison linéaire de la famille $((2, 1, 2), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$:

$$(2, 4, 2) = 4(2, 1, 2) + (-6)(1, 1, 2) + 6(0, 1, 1).$$

3. Supposons qu'il existe un couple (a, b) tel que :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a + b & a \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Or, deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux,

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ a + b = 3 \\ a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

On peut donc dire que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est bien combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Dans $\mathbb{R}_3[x]$, les deux vecteurs $P = 1 + 2X - 3X^2 - eX^3$ et $Q = (-2) \cdot P = -2 - 4X + 6X^2 + 2eX^3$ sont colinéaires.

5. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, même choses, les deux vecteurs $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ \sqrt{2} & 0 & \pi \end{pmatrix}$

et $N = \ln(2) \cdot M = \begin{pmatrix} 2 \ln(2) & -\ln(2) & 4 \ln(2) \\ 0 & \ln(2) & 3 \ln(2) \\ \sqrt{2} \ln(2) & 0 & \pi \ln(2) \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

6. — Supposons que les fonctions $f_1 : x \mapsto e^{2x}$ et $f_2 : x \mapsto e^x$ soient colinéaires. Il existerait alors un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_1 = \lambda \cdot f_2$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} = \lambda e^x$.

Or, comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$, on aurait $\lambda = e^x$ ce qui n'est pas possible car λ , comme toute constante est... constante (indépendante de x).

Les fonctions f_1 et f_2 ne peuvent être colinéaires.

— Il est assez clair que $\forall x \in \mathbb{R}, 3^{x+1} = 3 \times 3^x$.

Les fonctions $f_1 : x \mapsto 3^x$ et $f_2 : x \mapsto 3^{x+1} = 3 \times 3^x$ sont colinéaires.

7. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, les deux suites réelles $u = (5 + e^{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = -\sqrt{3} \cdot u = (-5\sqrt{3} - \sqrt{3}e^{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ sont colinéaires.

Correction de l'exercice II.5 : [ÉNONCÉ]

Méthode

Tant que l'on connaît les dimensions, montrer la liberté suffit.

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$ de dimension 3.

a. **Libre** : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} a(1, 0, 1) + b(-1, 1, 2) + c(-2, 1, 2) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow (a - b - 2c, b + c, a + 2b + 2c) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \\ \stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a & -c = 0 \\ & b + c = 0 \\ a & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi la famille E_1 est une famille libre.

Base : Comme E_1 est une famille libre de cardinal 3 qui est la dimension de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, elle en forme une base.

Génératrice : La famille E_1 est une base de E donc elle en est génératrice.

b. **Libre** : Même chose, : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} a(1, 0, 1) + b(-1, 1, 2) + c(0, 1, 3) &= (0, 0, 0) \Leftrightarrow (a - b, b + c, a + 2b + 3c) = (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \\ \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - 3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a & = b \\ & b = -c \\ & 0 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = b = -c. \end{aligned}$$

Il est donc possible d'obtenir une combinaison linéaire nulle de $(1, 0, 1)$, $b(-1, 1, 2)$ et $(0, 1, 3)$ sans que toutes les coordonnées a , b , c soient toutes nulles.

Le triplet $(1, 1, -1)$ convient par exemple. C'est la définition d'une famille liée.

Ainsi la famille E_2 n'est pas une famille libre.

Génératrice : Dans un espace de dimension 3, elle ne peut donc être génératrice sinon elle en formerait une base et serait, par conséquent, libre.

Si l'on veut être plus explicite, comme

$$1 \cdot (1, 0, 1) + 1 \cdot (-1, 1, 2) + (-1) \cdot (0, 1, 3) = (0, 0, 0),$$

on peut, par exemple, écrire que $(0, 1, 3) = (1, 0, 1) + (-1, 1, 2)$ puis :

$$\text{Vect}(E_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, ils sont libres et forment donc une base de $\text{Vect}(E_2)$ qui est alors de dimension 2.

Idée

Avec un peu d'intuition, on pourrait aussi montrer que $(1, 0, 0)$, par exemple, ne peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(1, 0, 1)$ et $(-1, 1, 2)$.

Base : Bien sûr, n'étant ni génératrice, ni libre, la famille E_2 n'est, a fortiori, pas une base de E .

- c. **Libre :** On dispose de deux vecteurs, par conséquent la famille $E_3 = ((1, 0, 1), (2, 0, 3))$ est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Il est clair que les coordonnées de $(1, 0, 1)$ et $(2, 0, 3)$ ne sont pas proportionnelles car $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ donc la famille E_3 est libre.

Génératrice : Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et que la famille E_3 est composée de seulement 2 vecteurs, elle ne peut être génératrice.

Plus explicite, le vecteur $(0, 1, 0)$ ne peut être obtenue comme combinaison linéaire de $(1, 0, 1)$ et $(2, 0, 3)$.

Base : La famille E_3 n'est pas une famille génératrice donc elle ne forme pas une base de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

- d. **Libre :** La famille E_4 , formée de 4 vecteurs, ne peut pas être une famille libre car l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3 alors toute famille libre possède au plus 3 vecteurs.

Génératrice : On revient à la définition : soit $u(x, y, z) \in E$ un vecteur quelconque. Peut-on trouver (au moins) un quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{aligned} u = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b - c \\ c \\ a + 3b + c + d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - c = x \\ c = y \\ a + 3b + c + d = z \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} a + 2b = x + y \\ c = y \\ b + d = -x - 2y + z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b + x + y \\ b = b \\ c = y \\ d = -b - x - 2y + z \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système admet une infinité de quadruplets solutions et, en particulier, pour $b = 0$, $(x + y, 0, y, -x - 2y + z)$ convient. La famille E_4 est génératrice de E .

Autre méthode : Sachant que $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, on peut essayer,

à l'aide d'opérations d'élémentaires et de l'algorithme de Gauss, de montrer que $\text{Vect}(E_4) = E$:

$$\begin{aligned} \text{Vect}(E_4) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ \text{Or, } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ on le retire :} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On peut retrancher $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sans changer l'espace engendré :

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Même chose en ajoutant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et retranchant $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= E.$$

La famille E_4 est bien génératrice de E .

Base : La famille E_4 n'est pas une famille libre donc elle ne forme pas une base de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

2. Dans $E = \mathbb{R}_3[x]$ de dimension 4.

a. **Libre :** $E_1 = (\mathbb{1}, X - 2\mathbb{1}, (X - 2\mathbb{1})^2) = (\mathbb{1}, -2\mathbb{1} + X, 4\mathbb{1} - 4X + X^2)$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} a\mathbb{1} + b(-2\mathbb{1} + X) + c(4\mathbb{1} - 4X + X^2) &= 0_{\mathbb{R}_3[x]} \\ \Leftrightarrow (a - 2b + 4c)\mathbb{1} + (b - 4c)X + cX^2 &= 0_{\mathbb{R}_3[x]} \end{aligned}$$

Deux polynômes étant égaux si, et seulement si ils ont les mêmes coefficients, on en déduit :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + 4c = 0 \\ b - 4c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

Ainsi, la famille E_1 est une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$.

Génératrice : La famille E_1 ne possède que 3 vecteurs donc elle ne peut être génératrice d'un espace de dimension 4.

Base : Non génératrice de E , la famille E_1 ne peut en former une base.

b. **Libre :** Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{aligned} a(3\mathbb{1}) + bX^2 + c(-X^3) + dX &= 0_{\mathbb{R}_3[x]} \Leftrightarrow 3a + dX + bX^2 - cX^3 = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \\ \Leftrightarrow a = b = c = d &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille E_2 est une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$.

Famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, on peut déjà conclure au caractère générateur et à la base mais faisons comme si nous ne l'avions pas vu :

Génératrice : À l'aide d'opérations élémentaires, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(E_2) &= \text{Vect}(3\mathbb{1}, X^2, -X^3, X) \\ &= \text{Vect}(\mathbb{1}, X, X^2, X^3) && \text{(on supprime les multiples)} \\ &= \mathbb{R}_4[x]. && \text{(en reconnaissant la base canonique de } \mathbb{R}_3[x] \text{)} \end{aligned}$$

La famille E_2 est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$.

Base : La famille E_2 est une famille libre et génératrice donc elle forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$.

💡 Idée
 E_1 est une famille de polynômes non nuls étagée par les degrés donc on doit se douter qu'elle est libre.

3. On rappelle que $0_E = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(x) = 0$.

Libre : Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{aligned} af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 &= 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) + df_4(x) &= 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ae^x + be^{2x} + ce^{3x} + de^{4x} &= 0 \end{aligned}$$

On pourrait faire le choix de 4 valeurs différentes de x afin d'obtenir 4 équations mais on va faire mieux avec les limites :

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a + be^x + ce^{2x} + de^{3x} = 0 \quad (\text{en divisant par } e^x \neq 0)$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0,$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, be^x + ce^{2x} + de^{3x} = 0.$$

On recommence :

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, b + ce^x + de^{2x} = 0.$$

En repassant à la limite,

$$\Leftrightarrow a = b = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, ce^x + de^{2x} = 0.$$

Encore une fois :

$$\Leftrightarrow a = b = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, c + de^x = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, de^x = 0.$$

On divise une dernière fois par $e^x \neq 0$:

$$\Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

La famille $E_1 = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est donc une famille libre de E

Autre méthode : En posant P le polynôme de $\mathbb{R}_4[x]$ défini par $P = aX + bX^2 + cX^3 + dX^4$, on a l'équivalence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ae^x + be^{2x} + ce^{3x} + de^{4x} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(e^x) = 0.$$

Le polynôme P a donc une infinité de racines pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, c'est le polynôme nul i.e. $a = b = c = d = 0$ et on retrouve le même résultat.

Génératrice : E est un espace vectoriel de dimension 5 et E_1 est composée de 4 vecteurs, par conséquent cette dernière ne peut constituer une famille génératrice.

Base : La famille E_1 est libre et non génératrice donc elle ne forme pas une base de l'espace vectoriel E .

4. Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension $2 \times 2 = 4$.

a. **Libre :** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b+c \\ b & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = b = c &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille E_1 est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Génératrice : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 4 et E_1 est composée de 3 vecteurs donc ce n'est pas une famille génératrice.

Base : La famille E_1 n'est pas une famille génératrice donc elle ne forme pas une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Rappel

— Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

— Un polynôme qui admet un nombre de racines supérieur à son degré est égal au polynôme nul.

b. **Libre** : Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b+d & b \\ b+d & b-c+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+d=0 \\ b=0 \\ b+d=0 \\ b-c+d=0 \end{cases} &\Leftrightarrow a=b=c=d=0. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille E_2 est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Base : Famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, la famille E_2 en forme une base.

Génératrice : Comme la famille E_2 est une base, elle est, en particulier, génératrice de E .

Autre méthode : On reconstruit E à partir de $\text{Vect}(E_2)$. À l'aide d'opérations élémentaires, on a :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(E_2) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{\substack{u_2 \leftarrow u_2 - u_4 \\ u_3 \leftarrow -u_3}}{=} \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{\substack{u_4 \leftarrow u_4 - u_1 - u_3}}{=} \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

La famille E_2 est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. **Libre** : La famille E_3 , composée de 5 vecteurs, n'est pas une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de dimension 4.

Génératrice : Le plus rapide avec nos moyens :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(E_3) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{\substack{u_2 \leftarrow u_2 + u_1 \\ u_4 \leftarrow u_4 - 2u_1 - u_3 + u_4}}{=} \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

La famille E_2 ne peut engendrer un espace de dimension 4 mais au plus 3 donc ce n'est donc pas une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Base : La famille E_3 n'est ni libre ni génératrice donc elle ne peut constituer une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$5. \text{ Après calcul, } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Libre : La famille E_1 est composée de 2 vecteurs non colinéaires car leurs coefficients ne sont pas proportionnels. C'est donc une famille libre.

Génératrice : Dans un espace de dimension $3 \times 3 = 9$, la famille E_1 de cardinal 2 ne saurait en former une famille génératrice.

Base : La famille E_1 est libre mais non génératrice donc elle ne peut constituer une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice II.6 : [ÉNONCÉ]

1. a. Comme $(-3, -6) = -3 \cdot (1, 2)$, $A = \text{Vect}((1, 2), (-3, -6)) = \text{Vect}((1, 2))$.

Le vecteur $(1, 2)$ étant non nul, il est libre. Générateur, par définition de A , il en forme une base et $\dim(A) = 1$.

- b. Comme $(5, 6) = 2 \cdot (3, 4) - (1, 2)$, $B = \text{Vect}((1, 2), (3, 4), (5, 6)) = \text{Vect}((1, 2), (3, 4))$.

Les deux vecteurs $(1, 2)$ et $(3, 4)$ ne sont pas colinéaires donc ils sont libres et générateurs, par définition, de B .

Donc $\dim(B) = 2$.

2. Déterminons tout d'abord la liberté de la famille $(1, 3, -3), (4, 2, -3), (-1, 7, 6)$:

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a(1, 3, -3) + b(4, 2, -3) + c(-1, 7, 6) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4b - c = 0 \\ 3a + 2b + 7c = 0 \\ -3a - 3b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{smallmatrix}] \begin{cases} a + 4b - c = 0 \\ -10b + 10c = 0 \\ 9b + 3c = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{10}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{smallmatrix}] \begin{cases} a + 4b - c = 0 \\ -b + c = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2] \begin{cases} a + 4b - c = 0 \\ -b + c = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

La famille $(1, 3, -3), (4, 2, -3), (-1, 7, 6)$ est donc libre.

Génératrice, par définition, de A , elle en forme une base et $\dim(A) = 3$.

3. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ puis donner leur dimension :

- a. Même raisonnement que précédemment : soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a(1, 2, -3, 4) + b(2, 4, -5, 1) + c(-2, -1, 2, 0) + d(3, 0, -1, -4) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 2c + 3d = 0 \\ 2a + 4b - c = 0 \\ -3a - 5b + 2c - d = 0 \\ 4a + b - 4d = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[\begin{smallmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{smallmatrix}] \begin{cases} -8a - 13b + 4c = 0 \\ 2a + 4b - c = 0 \\ -3a - 5b + 2c - d = 0 \\ 16a + 21b - 8c = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[\begin{smallmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 8L_2 \end{smallmatrix}] \begin{cases} 3b = 0 \\ 2a + 4b - c = 0 \\ -3a - 5b + 2c - d = 0 \\ -11b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2a - c = 0 \\ -3a + 2c - d = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2] \begin{cases} b = 0 \\ 2a - c = 0 \\ a - d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = 2a \\ d = a \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions paramétrées par a . En particulier, pour $a = 1$, il existe un quadruplet $(1, 0, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^4$ non nul tel que :

$$1 \cdot (1, 2, -3, 4) + 0 \cdot (2, 4, -5, 1) + 2 \cdot (-2, -1, 2, 0) + 1 \cdot (3, 0, -1, -4) = (0, 0, 0, 0). \quad (\text{II.2})$$

La famille est liée.

i Remarque

Comme $A \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(A) = \dim(\mathbb{R}^3)$, on a $A = \mathbb{R}^3$.

De plus, d'après (II.2), $(3, 0, -1, -4) = -1, 2, -3, 4) - 2(-2, -1, 2, 0)$.

On en déduit $A = \text{Vect}((1, 2, -3, 4), (2, 4, -5, 1), (-2, -1, 2, 0), (3, 0, -1, -4))$
 $= \text{Vect}((1, 2, -3, 4), (2, 4, -5, 1), (-2, -1, 2, 0))$.

Reste à savoir si la famille $(1, 2, -3, 4), (2, 4, -5, 1), (-2, -1, 2, 0)$ est libre. On recommence...

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a(1, 2, -3, 4) + b(2, 4, -5, 1) + c(-2, -1, 2, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 2c = 0 \\ 2a + 4b - c = 0 \\ -3a - 5b + 2c = 0 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[\begin{smallmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_4 \end{smallmatrix}] \begin{cases} -7a - 2c = 0 \\ -14a - c = 0 \\ 17a + 2c = 0 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[\begin{smallmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{smallmatrix}] \begin{cases} 21a = 0 \\ -14a - c = 0 \\ 3a = 0 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

La famille est donc libre.

Elle engendre A, par définition, donc elle en forme une base et $\dim(A) = 3$.

b. Il suffit simplement de traduire et de résoudre un système linéaire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z \\ t = x + y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z \\ t = 3y \end{cases} \quad (\text{en substituant } x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z \\ y = y \\ z = z \\ t = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect}((2, 1, 0, 3), (-1, 0, 1, 0)).$$

Les deux vecteurs $(2, 1, 0, 3)$ et $(-1, 0, 1, 0)$ sont non colinéaires donc libres. La famille est génératrice de B comme on vient de le voir donc elle en forme une base et $\dim(B) = 2$.

4. Les deux vecteurs $X - \mathbb{1}$ et $(X - \mathbb{1})^2$ ne sont pas colinéaires (pas le même degré) donc ils sont libres et engendrent $\text{Vect}(X - \mathbb{1}, (X - \mathbb{1})^2)$ par définition donc $\dim(\text{Vect}(X - \mathbb{1}, (X - \mathbb{1})^2)) = 2$.
5. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ce qui se traduit par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lambda \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Cette égalité n'est pas vraie pour $n = 1$, par exemple, donc ces deux vecteurs ne peuvent être liés. Ils sont libres, engendrent $\text{Vect}\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ donc en forment une base et

$$\dim\left(\text{Vect}\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)\right) = 2.$$

Correction de l'exercice II.8 : [ÉNONCÉ]

1. On sait que $\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(A))$. On est revenu aux exercices précédents.

Remarque : On sait déjà que $\text{rg}(A) \leq 4$.

Pour gagner du temps et avec beaucoup d'intuition, on peut remarquer que :

$$(6, 17, -7, 10) = -2(1, 2, -4, 3) + 3(2, 5, -3, 4) + 2(1, 3, -3, 2).$$

Donc, $\text{Vect}(A) = \text{Vect}((1, 2, -4, 3), (2, 5, -3, 4), (1, 3, -3, 2))$. Reste à montrer que ces 3 vecteurs sont libres :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a(1, 2, -4, 3) + b(2, 5, -3, 4) + c(1, 3, -3, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 2a + 5b + 3c = 0 \\ -4a - 3b - 3c = 0 \\ 3a + 4b + 2c = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ 5b + c = 0 \\ -2b - c = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ -4c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

La famille $(1, 2, -4, 3), (2, 5, -3, 4), (1, 3, -3, 2)$ est donc libre. Elle engendre $\text{Vect}(A)$, par définition, donc elle en forme une base et $\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(A)) = 3$.

2. Il est aussi facile de voir que $(2, 4, -1, -2) = (3, 6, 5, -6) - (1, 2, 6, -1)$ donc

$$\text{Vect}(B) = \text{Vect}((1, 2, 6, -1), (3, 6, 5, -6), (2, 4, -1, -2)) = \text{Vect}((1, 2, 6, -1), (3, 6, 5, -6)).$$

Les deux vecteurs $(1, 2, 6, -1)$ et $(3, 6, 5, -6)$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc ils forment une famille libre et génératrice de $\text{Vect}(B)$ ce qui permet d'affirmer que $\text{rg}(B) = \dim(\text{Vect}(B)) = 2$.

i Remarque

Sinon on revient au système comme dans les exercices précédents.

Correction de l'exercice II.9 : [ÉNONCÉ]

Les opérations élémentaires vont nous sauver.

$$\begin{aligned}
 F \cap G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\} \\
 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \right\} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \right\} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 3y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \right\} \\
 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} z = -3y \\ x = -2y \end{cases} \right\} \\
 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = -3y \end{cases} \right\} \\
 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \text{Vect}((-2, 1, -3)) = \text{Vect}((2, -1, 3)).
 \end{aligned}$$

Méthode

Pensez toujours à choisir des vecteurs de base agréables quitte à multiplier par -1 ou autre réel non nul.

Comme $(2, -1, 3)$ est un vecteur non nul, il est libre et forme une base de $F \cap G$ qui est donc de dimension 1.

Correction de l'exercice II.11 : [ÉNONCÉ]

1. Commençons par montrer que la famille est libre.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3 = 0_{\mathbb{R}[x]}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-2)(x-3) + cx(x-1)(x-3) + dx(x-1)(x-2) = 0$$

Relation, en particulier, vraie pour $x = 0$:

$$\Rightarrow -6a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Mais aussi pour $x = 1, x = 2$ puis $x = 3$ ce qui nous donne successivement :

$$\Rightarrow a = 0, 2b = 0, -2c = 0 \text{ et } d = 6d = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c = d = 0.$$

La réciproque pour $a = b = c = d = 0$ étant évidente, la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille libre de cardinal 4 dans un espace de même dimension, elle en forme une base.

2. a. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x+3} = e^3 e^x, f_4 = e^3 \cdot f_3$ et la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ n'est pas libre.
b. D'après la question précédente,

$$\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_5).$$

Montrons que la famille (f_1, f_2, f_3, f_5) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})$.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$af_1 + bf_2 + cf_3 + df_5 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{++}, a \ln(x) + bx + ce^x + d \frac{1}{x} = 0.$$

Attention

Développer est une très mauvaise idée !

Idée

Le raisonnement est identique à la question précédente en reprenant un peu les idées de l'exemple (??) question 3..

D'après les limites de croissances comparées, il apparaît intéressant de diviser par e^x et de regarder la limite en $+\infty$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{++}, a \frac{\ln(x)}{e^x} + b \frac{x}{e^x} + c + d \frac{1}{xe^x} &= 0 \quad \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c = 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{++}, a \ln(x) + bx + d \frac{1}{x} &= 0. \end{aligned}$$

En divisant ensuite par $x \in \mathbb{R}^{++}$ donc non nul, on obtient ensuite :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{++}, a \frac{\ln(x)}{x} + b + d \frac{1}{x^2} &= 0 \quad \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b = 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{++}, a \ln(x) + d \frac{1}{x} &= 0. \end{aligned}$$

L'égalité doit aussi être vraie pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow d = 0. \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{++}, a \ln(x) &= 0. \\ \Leftrightarrow a = b = c = d &= 0. \end{aligned}$$

La famille (f_1, f_2, f_3, f_5) est donc une famille libre de E et elles engendrent, par définition, leur Vect dont elles forment une base.

En particulier,

$$\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = \text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_5) = 4.$$

3. a. Il est déjà clair que les suites r et s forment une famille libre de E . Reste à montrer qu'elles en sont génératrices.

Or, souvenir de première année, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique $x^2 - 5x + 6 = 0$ admet deux racines réelles $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$ donc de la forme :

$$\begin{aligned} \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / u_n &= \lambda 2^n + \mu 3^n. \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Vect}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}). \end{aligned}$$

Donc $E \subset \text{Vect}(r, s)$. Vérifions rapidement la réciproque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 5 \times 2^{n+1} - 6 \times 2^n = 2^n (5 \times 2 - 6) = 2^n \times 4 = 2^{n+2} \Rightarrow r \in E.$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 5 \times 3^{n+1} - 6 \times 3^n = 3^n (5 \times 3 - 6) = 3^n \times 9 = 3^{n+2} \Rightarrow s \in E.$$

Donc $E = \text{Vect}(r, s)$ qui est de dimension 2 et dont (r, s) est une base.

- b. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\alpha a + \beta b = 0_E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha a_n + \beta b_n = 0.$$

Or, cette relation doit être aussi vraie pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\Rightarrow \alpha a_0 + \beta b_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0. \quad \Rightarrow \alpha a_1 + \beta b_1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 0.$$

Le seul couple possible étant $(\alpha = 0, \beta = 0)$, la famille (a, b) de cardinal 2 est libre dans un espace de dimension 2. Elle en forme une base.

Remarque : Même si c'est tout à fait inutile ici, explicitons a et b en fonction de leurs conditions initiales :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda 2^n + \mu 3^n.$$

Comme $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, (λ, μ) est solution du système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -2. \end{cases}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n - 2 \times 3^n$.

De même pour $b : \exists (\lambda', \mu') \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda' 2^n + \mu' 3^n$.

Comme $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$, (λ', μ') est solution du système :

$$\begin{cases} \lambda' + \mu' = 0 \\ 2\lambda' + 3\mu' = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} \lambda' + \mu' = 0 \\ \mu' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda' = -1 \\ \mu' = 1. \end{cases}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = -2^n + 3^n$.

Correction de l'exercice II.12 : [ÉNONCÉ]

1. a. On pourrait montrer que la famille (a, b, c, d) est libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$ quoique libre suffirait mais, en anticipant la question suivante et pour changer, on peut revenir à la définition.

Il est déjà clair que $\text{Vect}(a, b, c, d) \subset \mathbb{R}^4$.

Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$u \in \text{Vect}(a, b, c, d) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / u = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$$

$$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} \alpha + \gamma + \delta = x \\ 2\alpha + \beta + \gamma + \delta = y \\ 3\alpha + \beta + 2\delta = z \\ 4\alpha + \beta + 2\gamma = t \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_2 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_1 - L_3} \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} \alpha + \gamma + \delta = x \\ \alpha + \beta = -x + y \\ -2\gamma = -x - y + z \\ \gamma - 3\delta = -x - z + t \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3, L_4 \leftarrow 2L_4 + L_3} \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 2\alpha + 2\delta = x - y + z \\ \alpha + \beta = -x + y \\ -2\gamma = -x - y + z \\ -6\delta = -3x - y - z + 2t \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_4} \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 6\alpha = -4y + 2z + 2t \\ \alpha + \beta = -x + y \\ -2\gamma = -x - y + z \\ -6\delta = -3x - y - z + 2t \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow 6L_2 + L_1} \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 6\alpha = -4y + 2z + 2t \\ 6\beta = -6x + 10y - 2z - 2t \\ -2\gamma = -x - y + z \\ -6\delta = -3x - y - z + 2t \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow 6L_2 + L_1} \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} \alpha = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}t \\ \beta = -x + \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}t \\ \gamma = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ \delta = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z - \frac{1}{3}t \end{cases}$$

Il existe donc un unique quadruplet de coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$ i.e. Tout vecteur de u de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique en fonction des vecteurs a, b, c, d . C'est bien la définition d'une base.

Conclusion, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

- b. D'après la question précédente, on en déduit que :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \frac{1}{2} \\ \delta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad (1, 1, 1, 1) = \frac{1}{2}(1, 1, 0, 2) + \frac{1}{2}(1, 1, 2, 0).$$

2. a. Ici aussi on pourrait montrer que la famille est libre et génératrice mais on va le faire plus directement à l'aide d'opérations élémentaires et se ramener à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ &\stackrel{\substack{u_3 \leftarrow \frac{1}{3}(u_3 - u_2) \\ u_2 \leftarrow \frac{1}{2}(u_2 - u_1)}}{=} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ &\stackrel{u_4 \leftarrow \frac{1}{4}(u_4 - u_1 - 2u_2 - 3u_3)}{=} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

⚠ Attention

Montrer que deux Vect sont égaux ne suffit pas à montrer la liberté d'une famille.

La famille $\mathcal{B}$ est donc génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Étant de cardinal 4, la dimension, de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ elle en forme une base.

- b. Comme $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont uniques. Il suffit de les trouver.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ces coordonnées.

Alors,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 6 \\ 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 4 \\ 3\gamma + 3\delta = 0 \\ 4\delta = 4 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{système} \\ \text{triangulaire} \end{matrix} \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \\ \delta = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion, les coordonnées de $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(4, 2, -1, 1)$.

3. a. Le même raisonnement que celui mené à l'exercice (1) montre que $\mathcal{F}$ est une famille libre.
b. $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$, dimension 3. Étant composée de 3 vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
c. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le triplet de coordonnées de X dans $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} X &= a(X - 1)(X + 1) + b(X + 1)(X - 2) + c(X - 1)(X - 2) \\ \forall x \in \mathbb{R}, x &= a(x - 1)(x + 1) + b(x + 1)(x - 2) + c(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

⚠ Attention

Développer est toujours une mauvaise idée.

En évaluant en 2, on a :

$$2 = 3a \iff a = \frac{2}{3}.$$

En évaluant en 1, on a :

$$1 = -2b \iff b = -\frac{1}{2}.$$

En évaluant en -1 , on a :

$$-1 = 6c \iff c = -\frac{1}{6}.$$

Les (uniques) coordonnées de X dans la base $\mathcal{F}$ sont donc $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$.

Correction de l'exercice II.13 : [ÉNONCÉ]

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $a = (1, 1, 3)$, $b = (1, 0, 2)$, $c = (2, 1, 5)$, $d = (3, 2, 8)$, $E_1 = \text{Vect}(a, b)$ et $E_2 = \text{Vect}(c, d)$.

1. Les deux vecteurs étant non colinéaires, on montre facilement que la famille (a, b) est une base de E_1 et que la famille (c, d) en est une de E_2 .

Ainsi $\dim(E_1) = \dim(E_2) = 2$.

2. Il suffit de montrer que c et d sont combinaisons linéaires de la famille (a, b) .

Or, $c = 1.a + 1.b$ et $d = 2.a + 1.b$ donc $c \in E_1$ et $d \in E_1$.

3. Comme $c \in E_1$ et $d \in E_1$ alors $E_2 = \text{Vect}(c, d) \subset E_1$ car, par définition, $\text{Vect}(c, d)$ est le plus petit sous-espace vectoriel au sens de l'inclusion contenant c et b .

Ainsi, $E_2 \subset E_1$.

Comme $\dim(E_1) = \dim(E_2)$, on en déduit $E_1 = E_2$.

Correction de l'exercice II.14 : [ÉNONCÉ]

On pourrait montrer que E est non vide et stable par combinaisons linéaires mais on peut aussi montrer que c'est un Vect donc un espace vectoriel. On pourra même en préciser sa base puis sa dimension

$$\begin{aligned} 1. E &= \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & -b & -2b \\ 2b & -b & -4b \\ -b & b & 3b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect}(I, A). \end{aligned}$$

E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en tant que sous-espace vectoriel engendré.

2. La famille (I, A) est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc libre. Elle engendre $E = \text{Vect}(I, A)$ par définition donc en forme une base et $\dim(E) = 2$.