

1. Citer, sans démonstration, deux ensembles usuels d'espaces vectoriels.

Relire les exemples du cours.

2. Donner un exemple d'espace qui n'est pas un espace vectoriel. Justifier votre choix.

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 1\}$ car il ne contient pas le vecteur nul $(0, 0, 0, 0)$.

3. Résoudre le système suivant, donner son ensemble solution $\mathcal{S}$ ainsi que deux triplet solutions possibles.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 4z = 15 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 4z = 15 \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1] \begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y + z = -3 \\ -3y + z = -3 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2] \begin{cases} x + 4y = 9 \\ -3y + z = -3 \\ -3y + z = -3 \end{cases} \xLeftrightarrow \begin{cases} x = 9 - 4y \\ y = y \\ z = -3 + 3y \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \{(9 - 4t; t; -3 + 3t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Les triplets $(9; 0; -3)$ et $(5; 1; 0)$ conviennent.

4. Démontrer que F est un espace vectoriel.

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 0_{3,1}\},$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En trois étapes comme dans le cours :

- a. Par définition, $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.

b. $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$ donc le vecteur nul appartient à F qui est non vide.

- c. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, X, Y \in F$.

On a :

$$\begin{aligned} A(\lambda X + \mu Y) &= \lambda AX + \mu AY && \text{(d'après les lois du produit matriciel)} \\ &= 0_{3,1} + 0_{3,1} && \text{car } X, Y \in F \\ &= 0_{3,1}. \end{aligned}$$

Donc $\lambda X + \mu Y \in F$ qui est stable par combinaisons linéaires.

L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. C'est également un espace vectoriel.

5. Compléter la procédure f suivante sur **Python** qui définit la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 10, \\ 10 & \text{sinon.} \end{cases}$$

```
Éditeur  
1  def f(x) :  
2      if ... :  
3          return ...  
4      else :  
5          return ...
```

1. Citer, sans démonstration, deux ensembles usuels d'espaces vectoriels.

Relire les exemples du cours.

2. Donner un exemple d'espace qui n'est pas un espace vectoriel. Justifier votre choix.

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 1\}$ car il ne contient pas le vecteur nul $(0, 0, 0, 0)$.

3. Résoudre le système suivant et donner son ensemble solution $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases} &\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ 3x + y = 7 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} 5x + z = 11 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 7 - 3x \\ z = 11 - 5x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \{(t; 7 - 3t; 11 - 5t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \right).$$

Les triplets $(0; 7; 11)$ et $(2; 1; 1)$ conviennent.

4. Démontrer que F est un espace vectoriel.

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = X\},$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En trois étapes comme dans le cours :

- a. Par définition, $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.

- b. $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc le vecteur nul appartient à F qui est non vide.

- c. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, X, Y \in F$.

On a :

$$\begin{aligned} A(\lambda X + \mu Y) &= \lambda AX + \mu AY && \text{(d'après les lois du produit matriciel)} \\ &= \lambda X + \mu Y && \text{car } X, Y \in F \\ &= (\lambda X + \mu Y). \end{aligned}$$

Donc $\lambda X + \mu Y \in F$ qui est stable par combinaisons linéaires.

L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. C'est également un espace vectoriel.

5. Compléter la procédure f suivante sur **Python** qui définit la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

```
Éditeur  
1  def f(x) :  
2      if ... :  
3          return ...  
4      else :  
5          return ...
```