

Dans les questions faisant intervenir des instructions en langage **Python** on prendra soin d'importer les bibliothèques nécessaires lors de leur première utilisation.
 Pour traiter les questions d'informatique, les candidats sont invités à se référer aux annexes fournies en fin de sujet. Ils ne sont pas limités à l'utilisation des seules fonctions mentionnées dans ces annexes.

EXERCICE 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = 0_3$.

1. Déterminer les ensembles E_{0_3} et E_{I_3} .

- Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in E_{0_3} &\iff 0_3 M + M 0_3 = 0_3 \\ &\iff 0_3 = 0_3 \end{aligned}$$

Conclusion : $E_{0_3} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in E_{I_3} &\iff I_3 M + M I_3 = 0_3 \\ &\iff 2M = 0_3 \\ &\iff M = 0_3 \end{aligned}$$

Conclusion : $E_{I_3} = \{0_3\}$.

2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- ✓ Par définition $E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
- ✓ Puisque $C 0_3 + 0_3 C = 0_3$, on a $0_3 \in E_C$. Ainsi : $E_C \neq \emptyset$.
- ✓ Soient $M, N \in E_C$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que $aM + bN \in E_C$.
 - * Puisque $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a déjà $aM + bN \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - * Ensuite :

$$\begin{aligned} C(aM + bN) + (aM + bN)C &= aCM + bCN + aMC + bNC \\ &= a(CM + MC) + b(CN + NC) \\ &= a0_3 + b0_3 \\ &= 0_3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} M, N \in E_C$$

Par conséquent : $aM + bN \in E_C$.

Conclusion : pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit M une matrice de E_A . Montrer que tM appartient à E_A .

- ✓ La matrice tM appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- ✓ Puis, remarquons que A est diagonalisable, ainsi ${}^tA = A$. D'où :

$$\begin{aligned} A{}^tM + {}^tMA &= {}^tA{}^tM + {}^tM{}^tA \\ &= {}^t(MA) + {}^t(AM) \\ &= {}^t(MA + AM) \\ &= {}^t0_3 \\ &= 0_3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{linéarité de la transposition} \\ M \in E_A \end{array}$$

Conclusion : si $M \in E_A$, alors ${}^tM \in E_A$.

♥ L'avis du chef ! ♥

Exercice très classique, relativement proche de la version fortement retouchée de **Ecricome 2008 E - Exercice 1** que l'on peut trouver [ici](#) par exemple.

♣ Méthode !

On revient à la définition de sous-espace vectoriel puisqu'il s'agit ici de traiter un cas général et qu'on ne peut donc pas déterminer une famille génératrice de E_C ... Sinon, on pourrait raisonner par équivalences pour obtenir $E_C = \text{Vect}(\dots)$.

📖 Rappel...

Pour toutes matrices A et B telles que le produit AB existe, le produit ${}^tB{}^tA$ existe et ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

4. 4.a. Justifier que A est diagonalisable.

Conclusion : la matrice A est symétrique (à coefficients réels), elle est donc diagonalisable.

4.b. Soit λ un réel.

Montrer que si λ est valeur propre de A , alors :

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

- Après calculs, on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$A^3 = 9A$$

- Le polynôme $X^3 - 9X$ est donc annulateur de la matrice A . Le spectre de A est alors inclus dans l'ensemble des racines de $X^3 - 9X$.

Conclusion : si λ est valeur propre de A , alors $\lambda^3 - 9\lambda = 0$.

4.c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, telles que $D = P^{-1}AP$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 9\lambda = 0 &\iff \lambda(\lambda^2 - 9) = 0 \\ &\iff \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = 3 \\ \text{ou} \\ \lambda = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\text{Sp}(A) \subset \{-3; 0; 3\}$$

- Remarquons ensuite :

- $(A + 3I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$, donc -3 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé ;
- $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$, donc 0 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé ;
- $(A - 3I_3) \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$, donc 3 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

On en déduit que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :

- ✓ libre car constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes,
- ✓ de cardinal 3 égal à $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Conclusion : on retrouve ainsi que la matrice A est diagonalisable et, en posant

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; \quad P = P_{bc, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on a :

- ✓ D est diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant,
- ✓ P est inversible, comme matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base $\mathcal{B}$, à coefficients diagonaux égaux à 1,
- ✓ et par formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$, de sorte que $D = P^{-1}AP$.

Important !

Il est indispensable de donner A^2 pour obtenir les points de cette question... En effet, l'énoncé nous donne l'information que $A^3 = 9A$...

♣ Méthode !

Il est également possible de travailler sur le rang de $A - \lambda I_3$ pour obtenir l'équivalence $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \lambda^3 - 9\lambda = 0$. Mais c'est plus que ce qui est demandé... Cette méthode n'est donc pas vraiment attendue.

♥ Astuce du chef ! ♥

On trouve des vecteurs propres en remarquant des combinaisons linéaires donnant le vecteur nulle sur les colonnes de la matrice $A - \lambda I_3$.
Par exemple, on remarque que les colonnes de A vérifient $2C_1 + C_2 + 2C_3 = 0_{3,1}$, donc $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$.
En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B , on a :
 $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3$,
donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \iff xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0_{3,1}$.
Ici, il est bien évidemment possible de résoudre les équations matricielles $AX = 0_{3,1}$, $AX = -3X$ et $AX = 3X$ pour déterminer des vecteurs propres.

5. Calculer P^2 . En déduire une expression de P^{-1} .

On trouve $P^2 = 9I_3$. D'où : $P \times \frac{1}{9}P = I_3$.

$$\text{Conclusion : } P^{-1} = \frac{1}{9}P = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. 6.a. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que N appartient à E_D si, et seulement si, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned} N \in E_D &\iff DN + ND = 0_3 \\ &\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_3 \\ &\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = 0_3 \\ &\iff \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ h = 0 \\ i = 0 \end{cases} \\ &\iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.b. En déduire une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D .

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} E_D &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, (c, e, g) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (c, e, g) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est ainsi une famille :

- ✓ génératrice de E_D par définition,
- ✓ libre comme sous-famille d'une famille libre (sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

Conclusion : la famille $\mathcal{B}$ est une base de E_D et donc $\dim(E_D) = \text{Card}(\mathcal{B}) = 3$.

Rappels...

- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

7. 7.a. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.

Montrer que M appartient à E_A si, et seulement si, N appartient à E_D .

Puisque $N = P^{-1}MP$, on a $M = PNP^{-1}$. D'où :

$$\begin{aligned} M \in E_A &\iff AM + MA = 0_3 \\ &\iff PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = 0_3 \\ &\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0_3 \\ &\iff P(DN + ND)P^{-1} = 0_3 \\ &\iff DN + ND = 0_3 \end{aligned}$$

↙ en multipliant par P^{-1} par la gauche et P par la droite

$$\iff N \in E_D$$

7.b. En déduire une base de l'espace vectoriel E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathcal{B}$.

En notant pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont nuls exceptés celui situé en ligne i et colonne j , on sait que, d'après la question 6.b., la famille $(E_{1,3}, E_{2,2}, E_{3,1})$ est une base de E_D .

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} M \in E_A &\iff N \in E_D \\ &\iff \exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid N = aE_{1,3} + bE_{2,2} + cE_{3,1} \\ &\iff \exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid P^{-1}MP = aE_{1,3} + bE_{2,2} + cE_{3,1} \\ &\iff \exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid M = aPE_{1,3}P^{-1} + bPE_{2,2}P^{-1} + cPE_{3,1}P^{-1} \end{aligned}$$

question 6.b.

Conclusion : la famille $(PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,1}P^{-1})$ est une base de E_A .

Important !

On revient ici à la définition de ce qu'est une base d'un espace vectoriel. Une famille est une base d'un espace vectoriel E lorsque tout vecteur de E se décompose en une unique combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Petite remarque

L'énoncé aurait pu demander de démontrer que φ est un endomorphisme : à savoir faire !

8. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $(A + M)^2 = A^2 + M^2$.

On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M .

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} (A + M)^2 = A^2 + M^2 &\iff (A + M)(A + M) = A^2 + M^2 \\ &\iff A^2 + AM + MA + M^2 = A^2 + M^2 \\ &\iff AM + MA = 0_3 \\ &\iff M \in E_A \end{aligned}$$

Conclusion : $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid (A + M)^2 = A^2 + M^2\} = E_A$.

Attention !

Aucune raison que A et M commutent, donc on ne peut pas utiliser d'identité remarquable !

9. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \varphi(M) = AM + MA$.

En utilisant certains résultats des questions précédentes, déterminer le rang de φ .

Par définition :

$$\ker(\varphi) = E_A$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \dim(\ker(\varphi)) &= \dim(E_A) \\ &= 3 \end{aligned}$$

question 7.b.

Mais, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \text{rg}(\varphi) + \dim(\ker(\varphi))$$

Or $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9...$

Conclusion : $\text{rg}(\varphi) = 6$.

Important !

On prend le temps de bien chercher un lien entre φ et ce qui précède... Une fois cette égalité obtenue, on comprend ce qu'il faut faire puisque l'énoncé demande le rang de φ !

Exercice 1

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$ et on a en particulier $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$.

1. a) On cherche ici deux constantes réelles a et b telles que :

$$\forall x \in [0; 1], \quad \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{1}{4-x^2} \iff \frac{a(2+x) + b(2-x)}{(2-x)(2+x)} = \frac{1}{4-x^2} \iff \frac{(2a+2b) + (a-b)x}{4-x^2} = \frac{1}{4-x^2}.$$

Par identification des coefficients au numérateur, on veut donc a et b tels que :

$$\begin{cases} a-b &= 0 \\ 2a+2b &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=b \\ 4a=1 \end{cases} \iff a=b=\frac{1}{4}.$$

b) Du résultat précédent, on déduit :

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} \right) dx = \frac{1}{4} \left[-\ln(2-x) + \ln(2+x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} (-\ln(1) + \ln(3) + \ln(2) - \ln(2)) = \boxed{\frac{1}{4} \ln(3)}. \end{aligned}$$

2. On peut directement calculer :

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[\ln(4-x^2) \right]_0^1 = -\frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(4)) = \boxed{\ln(2) - \frac{1}{2} \ln(3)}.$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale :

$$4u_n - u_{n+2} = \int_0^1 \frac{4x^n}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

b) La fonction Python ci-dessous calcule et renvoie la valeur de u_n , lorsque n est passé en argument :

```
def suite(n):
    if (-1)**n==1 : # se produit ssi n est pair!
        u = np.log(3)/4
        for k in range(2,n+1,2): # k varie avec un pas de 2
            u = 4*u - 1/(k-1) # car u_k = 4*u_{k-2} - 1/(k-1)
    else:
        u = np.log(2/np.sqrt(3)) # bien égal à ln(2) - 1/2*ln(3)
        for k in range(3,n+1,2):
            u = 4*u - 1/(k-1) # meme relation de récurrence!
    return u
```

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0; 1]$:

$$0 \leq x^2 \leq 1 \iff 3 \leq 4 - x^2 \leq 4 \xLeftrightarrow{(*)} \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4 - x^2} \geq \frac{1}{4} \xLeftrightarrow{x^n \geq 0} \frac{x^n}{3} \geq \frac{x^n}{4 - x^2} \geq \frac{x^n}{4}.$$

(*) : par (stricte) décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions comparées sont continues sur $[0; 1]$ et $0 < 1$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4 - x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3} dx \iff \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}.$$

b) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(n+1)} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(n+1)}$, le théorème d'encadrement assure que :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

c) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est, à un facteur constant près, la série harmonique qui diverge (série de Riemann où $\alpha = 1 \leq 1$).

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

5. a) Le script fournit par l'énoncé et utilisant la fonction précédemment déclarée produit un affichage graphique des termes de la suite $(3n \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui montre que cette suite semble converger en croissant vers 1.

On aurait donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n \cdot u_n = 1 \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$.

C'est en tout cas la seule proposition de l'énoncé qui soit cohérente (et qui reste à démontrer).

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans l'intégrale définissant u_n , on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{4 - x^2} \longrightarrow u'(x) = -\frac{-2x}{(4 - x^2)^2} = \frac{2x}{(4 - x^2)^2} \\ v'(x) &= x^n \longrightarrow v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, donc par intégration par parties :

$$u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4 - x^2)} \right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, comme à la question 4.a) :

$$3 \leq 4 - x^2 \leq 4 \xLeftrightarrow{(1)} 9 \leq (4 - x^2)^2 \leq 16 \xLeftrightarrow{(2)} \frac{1}{9} \geq \frac{1}{(4 - x^2)^2} \geq \frac{1}{16} \xLeftrightarrow{(3)} \frac{x^{n+2}}{9} \geq \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} \geq \frac{x^{n+2}}{16},$$

(1) par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, (2) par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ et (3) puisque $x^{n+2} \geq 0$.

Les fonctions comparées sont continues sur $[0; 1]$ et $0 < 1$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9} dx \geq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx \geq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16} dx \iff \frac{1}{9(n+2)} \geq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx \geq \frac{1}{16(n+1)}.$$

Le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{9(n+2)} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{16(n+1)}$ permet d'invoquer le théorème d'encadrement, qui assure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx = 0.$$

d) Il y a plusieurs façons de conclure ici, en voici une : pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède,

$$3nu_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx,$$

d'où, d'après le résultat de la question précédente, et le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3nu_n = 1 - 1 \times 0 = 1, \quad \text{ce qui prouve bien que } \boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}}.$$