

DM 2

D'après Ecricome et Edhec

Exercice 1 – (D'après ECRICOME 2025)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = O_3$.

- Déterminer les ensembles E_{O_3} et E_{I_3} .
- Montrer que, pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Soit M une matrice de E_A . Montrer que M^T appartient à E_A .
- (khûbe)** Justifier que A est diagonalisable.
 - (khûbe)** Soit λ un réel. Montrer que si λ est valeur propre de A alors :

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

- (khûbe)** Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, telles que $D = P^{-1}AP$.

Dans toute la suite de l'exercice, D et P désignent les matrices introduites à la question 4.(c).

En attendant de savoir faire les trois questions précédentes, on admettra pour la suite que :

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer P^2 . En déduire une expression de P^{-1} .
- Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que N appartient à E_D si et seulement si
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
 - En déduire une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D .
- Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que M appartient à E_A si et seulement si N appartient à E_D .
 - En déduire une base de l'espace vectoriel E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathcal{B}$.
- Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $(A + M)^2 = A^2 + M^2$. On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M .
- Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \varphi(M) = AM + MA$. En utilisant certains résultats des questions précédentes, déterminer le rang de φ .

Exercice 2 – (D’après EDHEC 2024)

Dans tout l’exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$$

et on a en particulier $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$.

1. a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

b. En déduire que $u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)$.

2. Calculer u_1 .

3. a. Pour tout entier naturel n , exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n .

b. Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu’elle renvoie la valeur de u_n à l’appel de `suite(n)`.

```

1  def suite(n):
2      if (-1)**n == 1:
3          u = np.log(3) / 4
4          for k in range(2, n + 1, 2):
5              u = 4 * u - ...
6      else:
7          u = np.log(2 / np.sqrt(3))
8          for k in range(3, n + 1, 2):
9              u = 4 * u - ...
10     return u

```

4. a. Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour établir l’encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

b. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

c. La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

5. a. On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```

1  x = np.arange(0, 41)
2  u = [] # liste vide
3  for n in range(41):
4      u.append(3 * n * suite(n))
5
6  plt.plot(x, u, '+')
7  plt.show()

```

Ce script renvoie le graphique représentant $(3nu_n)$ en fonction de n .

Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n} \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

b. Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

c. Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$$

d. Vérifier la conjecture établie à la question 5a).