

Khôlles 1

Compléments sur les suites et les séries réelles

1. QUESTIONS DE COURS (AU CHOIX DE L'INTERROGATEUR)

Relations de comparaison (Négligeabilité et Équivalents)

1. Définitions & Notations

- Donner la définition avec la limite de $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$. Comment cette propriété se caractérise-t-elle à l'aide d'une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- Donner la définition quantifiée de $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Quelle est la seule suite équivalente à la suite nulle ?

2. Propriétés algébriques

- Rappeler la propriété de compatibilité des équivalents avec le produit, le quotient et les puissances fixes ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- Est-il vrai que $u_n \sim v_n \implies e^{u_n} \sim e^{v_n}$? Justifier ou donner un contre-exemple (ex. $u_n = n + 1$ et $v_n = n$).
- Que peut-on dire du signe de deux suites équivalentes à partir d'un certain rang ? En donner la démonstration.

3. Équivalents usuels & Croissances comparées

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Rappeler les équivalents usuels :

Opération / Fonction	Équivalent quand $u_n \rightarrow 0$
Exponentielle	$e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$
Logarithme	$\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$
Puissance ($\alpha \neq 0$)	$(1 + u_n)^\alpha - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha u_n$

- Ranger par ordre de négligeabilité croissante en $+\infty$ (chaîne de croissances comparées) :

$n!, \quad n^\beta \ (\beta > 0), \quad (\ln n)^\alpha \ (\alpha > 0), \quad a^n \ (a > 1), \quad n^n$

Séries numériques

1. Généralités & Définitions

- Soit $\sum u_n$ une série numérique. Définir la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que le reste d'ordre n , noté R_n (en précisant sa condition d'existence).
- Quelle est la condition nécessaire de convergence d'une série ? La réciproque est-elle vraie ? Justifier à l'aide d'un contre-exemple.

2. Séries usuelles

- À savoir :
 - Géométrique : $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
 - Exponentielle : $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- Énoncer la condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série géométrique $\sum q^n$, ainsi que la formule de sa somme et de son reste R_p en cas de convergence.

- Donner la condition de convergence et la somme des séries géométriques dérivées d'ordre 1 $\sum nq^{n-1}$ et d'ordre 2 $\sum n(n-1)q^{n-2}$.
- Énoncer le théorème sur la convergence et la somme de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$.
- Énoncer le théorème de convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

3. Séries à termes positifs & Critères de comparaison

- Pourquoi la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est-elle monotone ? En déduire la condition nécessaire et suffisante de convergence pour une telle série.
- Énoncer le théorème de comparaison par inégalité pour deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ($0 \leq u_n \leq v_n$).
- Énoncer le critère de comparaison par négligeabilité ($u_n = o(v_n)$) et le critère par équivalence ($u_n \sim v_n$) pour des séries à termes positifs.

4. Convergence absolue

- Définir la convergence absolue d'une série $\sum u_n$.
- Quel est le lien entre convergence absolue et convergence ? Quelle inégalité relie $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right|$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$?
- **Méthode :** Pour étudier une série dont le terme général n'est pas de signe constant, on étudie d'abord sa convergence absolue afin d'utiliser les théorèmes de comparaison/équivalence réservés aux séries à termes positifs.

2. EXERCICES TYPES & SAVOIR-FAIRE ATTENDUS

1. Convergence absolue & Équivalents directs :

- a. **Signe non constant :** Étudier la convergence absolue puis la convergence de la série $\sum u_n$ avec :

$$u_n = \frac{(-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n}$$

- b. **Utilisation directe des équivalents** ($u_n \rightarrow 0$) : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$v_n = 1 - \exp \left(\frac{1}{n} \right)$$

2. Séries usuelles & Changement de signe

- a. **Convergence absolue et exponentielle :** Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n (n+1)}{n!}$ est absolument convergente, puis calculer sa somme.
- b. **Combinaison logarithme / puissance :** Déterminer la nature de la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$$

3. Méthode mixte : Équivalent du module / Télescopage

- a. **Décomposition & Convergence absolue :** Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.
- Justifier que la série $\sum u_n$ converge absolument.
 - En utilisant la décomposition $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

- b. **(khûbe) Reste d'une série de Riemann** : Justifier la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$, puis par comparaison intégrale, montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$