

1. QUESTIONS DE COURS (AU CHOIX DE L'INTERROGATEUR)

Rappels de première année & Sous-espaces vectoriels

1. Structure d'espace vectoriel

- Rappeler les axiomes définissant un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Quels sont les espaces vectoriels usuels de référence ?
- Énoncer la propriété d'unicité du vecteur nul $\vec{0}_E$ et de l'opposé d'un vecteur. Caractériser l'égalité $\lambda \cdot x = \vec{0}_E$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

2. Sous-espaces vectoriels (sev)

- Donner la définition et les trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une partie non vide $F \subset E$ soit un sous-espace vectoriel de E .
- Que peut-on dire de l'intersection $F \cap G$?
- Montrer que l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels.

3. Sous-espaces vectoriels engendrés

- Définir la notion de combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs.
- Définir $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et énoncer le théorème fondamental sur la nature de cet ensemble.
- Simplifier l'expression de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ lorsque e_{n+1} est combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$.

Bases, Dimension et Rang

1. Familles libres, génératrices et bases

- Définir une famille génératrice, une famille libre et une base de E .
- Rappeler les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$.
- Quels critères rapides permettent d'affirmer qu'une famille de polynômes ou qu'une famille de matrices colonnes est libre ?

2. Dimension finie

- Définir un espace vectoriel de dimension finie ainsi que sa dimension $\dim(E)$.
- Rappeler la dimension des espaces usuels $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X])$.
- Soit E un espace de dimension $n \geq 1$. Énoncer les corollaires sur les familles libres ou génératrices à n éléments.
- Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie. Comparer $\dim(F)$ et $\dim(E)$ et traiter le cas d'égalité.

3. Coordonnées et Rang

- Définir la matrice des coordonnées $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ d'un vecteur x dans une base $\mathcal{B}$.
- Définir le rang $\text{rg}(e_1, \dots, e_n)$ d'une famille de vecteurs. Quelle est sa valeur maximale dans un espace de dimension p ?

4. Inversibilité des matrices

- Énoncer les caractérisations équivalentes de l'inversibilité d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'aide du système $AX = 0_{n,1}$ et de la famille de ses colonnes.

2. EXERCICES TYPES & SAVOIR-FAIRE ATTENDUS

1. Sous-espaces vectoriels & Familles engendrées :

- a. **Structure d'ensemble de matrices** : Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en l'écrivant sous la forme d'un sous-espace engendré $\text{Vect}(M_1, M_2)$.
 - En déduire une base et la dimension de F .
- b. **Commutateur d'une matrice** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $E_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Liberté, Génération & Bases :

- a. **Base de polynômes** : On pose $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1 + x$ et $f_3(x) = 1 + x + x^2$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ en utilisant l'échelonnement en degré.
- b. **Matrice des coordonnées** : Pour la fonction $P(x) = 2 + x + x^2$, déterminer sa matrice représentative $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$ dans la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$.

3. Noyau d'une matrice, Rang & Inversibilité :

- a. **Espace des solutions** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $AX = 0_{3,1}$ et en déduire une base du sous-espace vectoriel $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{3,1}\}$. La matrice A est-elle inversible ?
- b. **Calcul de rang** : Déterminer le rang de la famille de vecteurs suivante de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

4. Applications linéaires & Endomorphismes usuels :

- a. **(khûbe) Vérification d'application linéaire** : Soit l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f(P) = P(X+1) - P(X).$$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - Déterminer $\ker(f)$ en résolvant $f(P) = 0$.
 - Donner une base de $\text{Im}(f)$ et en déduire le rang de f .
- b. **Projecteur** : Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z) = (2x - y, x, z)$.
- Déterminer la matrice A de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 - Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.

5. Sommes directes & Équivalences de caractérisations :

- a. **Supplémentaires dans un espace de matrices** : Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
- Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_{n,n}\}$.
 - Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, écrire M sous la forme $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
 - En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- b. **(khûbe) Familles de polynômes étagés :** Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
- Démontrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre.
 - En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.