

Nom : .....

Prénom : .....

**Sujet 1****Espaces vectoriels****Question de cours :**

Énoncer la propriété d'unicité du vecteur nul  $\overrightarrow{0_E}$  et de l'opposé d'un vecteur. Caractériser l'égalité  $\lambda \cdot x = 0_E$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in E$ .

**Exercice 1 :**

Soit  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  en l'écrivant sous la forme d'un sous-espace engendré  $\text{Vect}(M_1, M_2)$ .
2. En déduire une base et la dimension de  $F$ .

**Exercice 2 – Khûbe :**

Soit l'application  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par

$$f(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer  $\ker(f)$  en résolvant  $f(P) = 0$ .
3. Donner une base de  $\text{Im}(f)$  et en déduire le rang de  $f$ .

Nom : .....

Prénom : .....

**Sujet 2****Espaces vectoriels****Question de cours :**

- Donner la définition et les trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une partie non vide  $F \subset E$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- Que peut-on dire de l'intersection  $F \cap G$  ?

**Exercice 1 :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $E_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 2 – Khûbe :**

Soit  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $g(x, y, z) = (2x - y, x, z)$ .

1. Déterminer la matrice  $A$  de  $g$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Calculer  $A^2 - 3A + 2I_3$ .
3. En déduire que  $A$  est inversible et donner son inverse.

Nom : .....

Prénom : .....

**Sujet 3****Espaces vectoriels****Question de cours :**

Montrer que l'ensemble des fonctions paires sur  $\mathbb{R}$  et l'ensemble des matrices symétriques  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels.

**Exercice 1 :**

On pose  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = 1 + x$  et  $f_3(x) = 1 + x + x^2$ .

1. Montrer que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Pour la fonction  $P(x) = 2 + x + x^2$ , déterminer sa matrice représentative  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$  dans la base  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ .

**Exercice 2 :**

On pose  $\mathcal{F} = ((X - 1)(X + 1), (X + 1)(X - 2), (X - 1)(X - 2))$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_2[x]$ .
2. En déduire que c'est une base de  $\mathbb{R}_2[x]$ .
3. Donner les coordonnées de  $X$  dans cette base.

Nom : .....

Prénom : .....

## Sujet 4

## Espaces vectoriels

## Question de cours :

## Sous-espaces vectoriels engendrés

- Définir la notion de combinaison linéaire d'une famille  $(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs.
- Définir  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  et énoncer le théorème fondamental sur la nature de cet ensemble.
- Simplifier l'expression de  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$  lorsque  $e_{n+1}$  est combinaison linéaire de  $(e_1, \dots, e_n)$ .

## Exercice 1 :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Résoudre le système  $AX = 0_{3,1}$  et en déduire une base du sous-espace vectoriel

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{3,1}\}.$$

La matrice  $A$  est-elle inversible ?

## Exercice 2 :

Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on pose  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Donner les coordonnées de la matrice  $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
3. Donner les coordonnées de la matrice  $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Nom : .....

Prénom : .....

**Sujet 5****Espaces vectoriels****Question de cours :**Définir une famille génératrice, une famille libre et une base de  $E$ .**Exercice 1 – Calcul de rang :**Déterminer le rang de la famille de vecteurs suivante de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  :

$$\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

**Exercice 2 – Khûbe :**Soit l'application  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par

$$f(P) = P(X + 1) - P(X).$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer  $\ker(f)$  en résolvant  $f(P) = 0$ .
3. Donner une base de  $\text{Im}(f)$  et en déduire le rang de  $f$ .

Nom : .....

Prénom : .....

**Sujet 6****Espaces vectoriels****Question de cours :**

- Rappeler les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Quels critères rapides permettent d'affirmer qu'une famille de polynômes ou qu'une famille de matrices colonnes est libre ?

**Exercice 1 :**

Soient  $E$  un espace vectoriel réel et  $u_1, u_2, u_3$  trois vecteurs de  $E$  tels que  $(u_1, u_2, u_3)$  forme une famille libre. Soit  $v \in E$ .

Montrer que : La famille  $(u_1, u_2, u_3, v)$  est libre  $\Leftrightarrow v \notin \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ .

**Exercice 2 – Khôlle :**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + z = 0\}.$$

Déterminer une base de  $F \cap G$ .

Nom : .....

Prénom : .....

## Sujet 7

## Espaces vectoriels

## Question de cours :

- Définir un espace vectoriel de dimension finie ainsi que sa dimension  $\dim(E)$ .
- Rappeler la dimension des espaces usuels  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X])$ .

## Exercice 1 :

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . On pose  $u_1 = e_1 - e_2 + e_3$ ,  $u_2 = e_1 - 2e_3$  et  $u_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ .

1. Montrer que  $(u_1, u_2, u_3)$  forme une base de  $E$ .
2. Déterminer les coordonnées de  $e_1, e_2$  puis de  $e_3$  dans cette nouvelle base  $(u_1, u_2, u_3)$ .

## Exercice 2 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z - 2t = 0 \\ 3x + 2z - t = 4 \end{cases}$$

Nom : .....

Prénom : .....

## Sujet 8

## Espaces vectoriels

## Question de cours :

Soit  $E$  un espace de dimension  $n \geq 1$ .

- Énoncer les corollaires sur les familles libres ou génératrices à  $n$  éléments.
- Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace  $E$  de dimension finie. Comparer  $\dim(F)$  et  $\dim(E)$  et traiter le cas d'égalité.

## Exercice 1 :

On considère les vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$  de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  définis par :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On note  $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ .

1. La famille  $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  est-elle une famille libre de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  ?
2. La famille  $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  est-elle une famille génératrice de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  ?
3. Extraire de la famille  $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  une base de  $F$ .

## Exercice 2 :

Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues  $(x, y, z)$  où  $a, b$  sont des paramètres réels.

$$\begin{cases} 3x + y - z = -1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$$

Nom : .....

Prénom : .....

## Sujet 9

## Espaces vectoriels

## Question de cours :

## Coordonnées et Rang

- Définir la matrice des coordonnées  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  d'un vecteur  $x$  dans une base  $\mathcal{B}$ .
- Définir le rang  $\text{rg}(e_1, \dots, e_n)$  d'une famille de vecteurs. Quelle est sa valeur maximale dans un espace de dimension  $p$  ?

## Exercice 1 :

On note  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $E = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X \right\}$  est un espace vectoriel réel.
2. Déterminer la dimension de  $E$ .

## Exercice 2 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Nom : .....

Prénom : .....

## Sujet 10

## Espaces vectoriels

## Question de cours :

Énoncer les caractérisations équivalentes de l'inversibilité d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à l'aide du système  $AX = 0_{n,1}$  et de la famille de ses colonnes.

## Exercice 1 :

1. Montrer que  $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ a & c & a+c \\ a & a-b & a-c \end{pmatrix} \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$  est un espace vectoriel réel.
2. Déterminer la dimension de E.

## Exercice 2 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x \quad \quad + z = 3 \end{cases}$$

Nom : .....

Prénom : .....

## Sujet 11

## Espaces vectoriels

## Question de cours :

- Donner la définition et les trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une partie non vide  $F \subset E$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- Que peut-on dire de l'intersection  $F \cap G$  ?

## Exercice 1 :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $E_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## Exercice 2 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Nom : .....

Prénom : .....

## Sujet 12

## Espaces vectoriels

## Question de cours :

Montrer que l'ensemble des fonctions paires sur  $\mathbb{R}$  et l'ensemble des matrices symétriques  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels.

## Exercice 1 :

On pose  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = 1 + x$  et  $f_3(x) = 1 + x + x^2$ .

1. Montrer que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Pour la fonction  $P(x) = 2 + x + x^2$ , déterminer sa matrice représentative  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$  dans la base  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ .

## Exercice 2 :

1. Montrer que  $(X^2 + 1, X + 1, 1)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer les coordonnées de  $X^2 + 1$  dans cette base.
3. Montrer que l'on peut compléter  $(X^2 + 1, X + 1, 1)$  en une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Proposer une telle base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

Nom : .....

Prénom : .....

## Sujet 13

## Espaces vectoriels

## Question de cours :

## Sous-espaces vectoriels engendrés

- Définir la notion de combinaison linéaire d'une famille  $(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs.
- Définir  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  et énoncer le théorème fondamental sur la nature de cet ensemble.
- Simplifier l'expression de  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$  lorsque  $e_{n+1}$  est combinaison linéaire de  $(e_1, \dots, e_n)$ .

## Exercice 1 :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Résoudre le système  $AX = 0_{3,1}$  et en déduire une base du sous-espace vectoriel  $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{3,1}\}$ .

La matrice  $A$  est-elle inversible ?

## Exercice 2 :

Soient  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid JMJ = M\}$ .

Justifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et en déterminer une base.

Nom : .....

Prénom : .....

**Sujet 14****Espaces vectoriels****Question de cours :**Définir une famille génératrice, une famille libre et une base de  $E$ .**Exercice 1 – Calcul de rang :**Déterminer le rang de la famille de vecteurs suivante de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  :

$$\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

**Exercice 2 – Khûbe :**Soit  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  une famille de polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  tels que  $\deg(P_k) = k$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

1. Démontrer que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est libre.
2. En déduire que c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Nom : .....

Prénom : .....

**Sujet 15****Espaces vectoriels****Question de cours :**

- Rappeler les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Quels critères rapides permettent d'affirmer qu'une famille de polynômes ou qu'une famille de matrices colonnes est libre ?

**Exercice 1 :**

Soient  $E$  un espace vectoriel réel et  $u_1, u_2, u_3$  trois vecteurs de  $E$  tels que  $(u_1, u_2, u_3)$  forme une famille libre. Soit  $v \in E$ .

Montrer que : La famille  $(u_1, u_2, u_3, v)$  est libre  $\Leftrightarrow v \notin \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ .

**Exercice 2 :**

Soient  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 3z = 0\}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux espaces vectoriels réels.
2. Déterminer une base de  $F$  et une base de  $G$ .
3. La famille obtenue en réunissant les vecteurs de la base de  $F$  et de ceux de  $G$  obtenues à la question précédente est-elle une famille libre ?
4. Déterminer l'espace vectoriel  $F \cap G$ .

Nom : .....

Prénom : .....

**Sujet 16****Espaces vectoriels****Question de cours :**

- Définir un espace vectoriel de dimension finie ainsi que sa dimension  $\dim(E)$ .
- Rappeler la dimension des espaces usuels  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X])$ .

**Exercice 1 :**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . On pose  $u_1 = e_1 - e_2 + e_3$ ,  $u_2 = e_1 - 2e_3$  et  $u_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ .

1. Montrer que  $(u_1, u_2, u_3)$  forme une base de  $E$ .
2. Déterminer les coordonnées de  $e_1, e_2$  puis de  $e_3$  dans cette nouvelle base  $(u_1, u_2, u_3)$ .

**Exercice 2 – Khûbe :**

Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_{n,n}\}$ .
2. Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , écrire  $M$  sous la forme  $M = S + A$  avec  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .
3. Cette écriture est-elle unique ? Justifier.

Nom : .....

Prénom : .....

**Sujet 17****Espaces vectoriels****Question de cours :**

Soit  $E$  un espace de dimension  $n \geq 1$ .

- Énoncer les corollaires sur les familles libres ou génératrices à  $n$  éléments.
- Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace  $E$  de dimension finie. Comparer  $\dim(F)$  et  $\dim(E)$  et traiter le cas d'égalité.

**Exercice 1 :**

On considère les vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$  de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  définis par :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On note  $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ .

1. La famille  $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  est-elle une famille libre de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  ?
2. La famille  $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  est-elle une famille génératrice de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  ?
3. Extraire de la famille  $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  une base de  $F$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$ .

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel réel.
2. Montrer que  $((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (1)_{n \in \mathbb{N}})$  forme une famille génératrice de  $E$ .
3. En déduire la dimension de  $E$ .

Nom : .....

Prénom : .....

## Sujet 18

## Espaces vectoriels

## Question de cours :

## Coordonnées et Rang

- Définir la matrice des coordonnées  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  d'un vecteur  $x$  dans une base  $\mathcal{B}$ .
- Définir le rang  $\text{rg}(e_1, \dots, e_n)$  d'une famille de vecteurs. Quelle est sa valeur maximale dans un espace de dimension  $p$  ?

## Exercice 1 :

On note  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $E = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X \right\}$  est un espace vectoriel réel.
2. Déterminer la dimension de  $E$ .

## Exercice 2 – Khûbe :

Soit  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  une famille de polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  tels que  $\deg(P_k) = k$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

1. Démontrer que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est libre.
2. En déduire que c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .