

III

Suites récurrentes du type

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

LES exercices que l'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence, il suffisait de se donner une fonction f quelconque, un u_0 dans le domaine de définition de f , et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Quelle illusion !

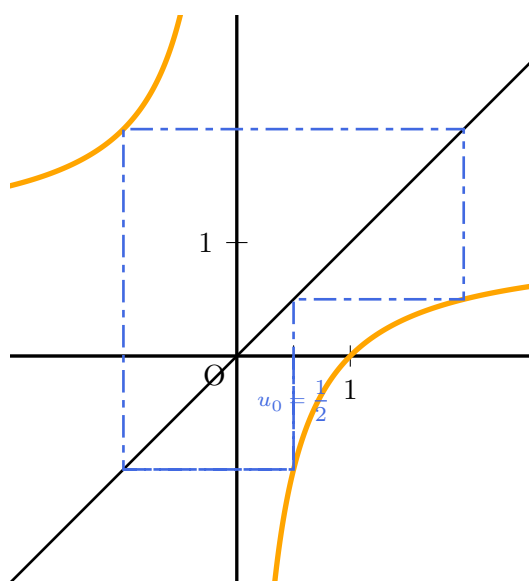


FIGURE III.1 : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = \frac{1}{2}$.

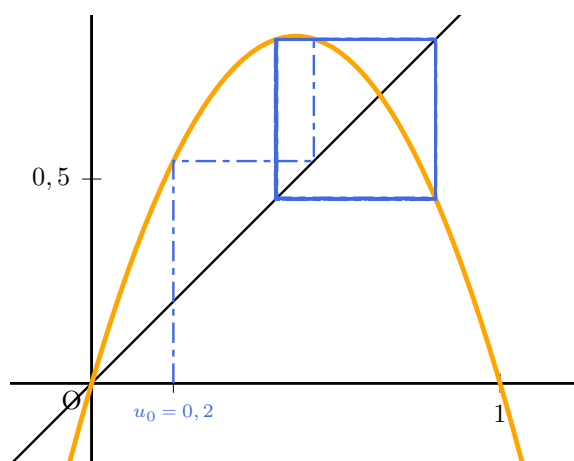


FIGURE III.2 : $u_{n+1} = 3.4u_n(1 - u_n)$ avec $u_0 = 0.2$.

FIGURE III.3 : Exemples de suites chaotiques. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède un cycle.

NOTONS par exemple f la fonction $x \mapsto 2 + \sqrt{2-x}$ définie sur $]-\infty; 2]$ et posons :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Comme $u_0 \in]-\infty; 2]$, on peut calculer $u_1 = f(u_0) = 3$, mais ensuite ????. Aucun sens ! Quelle valeur pour u_2 ?

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n’est ici pas définie.

PIRE, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky ^[1] sur les fonctions chaotiques a fait l’objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1 - u_n)u_n, \mu \in [0; 1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

MAIS comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ? C’est le propos de ce chapitre.

Plan du chapitre

I SUITES RÉCURRENTES DU TYPE $u_{n+1} = f(u_n)$	2
I.1 PLAN D’ÉTUDE CLASSIQUE	3
I.2 STABILITÉ ET DÉFINITION	4
I.3 VARIATIONS	5
I.4 CONVERGENCE ET POINT FIXE	7
I.5 L’INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS	9
II PLAN D’ÉTUDE DES SUITES RÉCURRENTES D’ORDRE 1	10
INDEX	13

I. SUITES RÉCURRENTES DU TYPE $u_{n+1} = f(u_n)$

On s’intéresse dans cette partie à des suites définies par des relations de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

[1]. Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky est un éminent mathématicien ukrainien célèbre pour le développement du théorème de Sharkovsky sur les périodicités des systèmes dynamiques discrets en 1964.

Le théorème de Sharkovsky est un théorème portant sur l’itération des fonctions continues.

Il donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu’on itère la fonction f , c’est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.

Ce théorème fait partie des premiers exemples remarquables de la *théorie des systèmes dynamiques*, introduisant la notion de *chaos*. Sa popularité est telle qu’il se retient souvent sous la forme d’un « slogan », correspondant à un énoncé simplifié :

$3\text{-cycle implique chaos}$

Il faut comprendre par là que toute fonction continue présentant un cycle de période 3 admet un cycle de période n pour tout entier n .

I.1 – Plan d'étude classique

Aux concours (EML/EDHEC/ECRICOME), les exercices portant sur de telles suites suivent toujours le même schéma :

1. Étude de la fonction f .
2. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Plus précisément, la partie sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ressemblera essentiellement à

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in I$ où I est un certain intervalle dit de stabilité
2. Écrire/compléter une fonction **Python** qui affiche les n premiers termes de la suite / le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante / décroissante.
4. Au choix :
 - a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ .
 - b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty / -\infty$.
5. Au choix :
 - a. Écrire/compléter une fonction **Python** qui affiche le premier entier n vérifiant $|u_n - \ell| \leq 10^{-4}$.
 - b. Écrire/compléter une fonction **Python** qui affiche le premier entier n vérifiant $u_n \geq 10^4$.
6.
 - a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq M |u_n - \ell|$.
 - b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$.

Exemple 1 – Un premier exemple simple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en montrant que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

Ce résultat se montre par récurrence :

Initialisation : Par définition, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2}$.

On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier n tel que

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2 \\ 1 &\leq u_n + 1 \leq u_{n+1} + 1 \leq 3 && \text{(on ajoute 1)} \\ 0 &\leq \sqrt{1} \leq \sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{u_{n+1} + 1} \leq \sqrt{3} && \left(\begin{array}{l} \text{on compose par } x \mapsto \sqrt{x} \\ \text{qui est croissante sur } \mathbb{R}_+ \end{array} \right) \\ 1 &\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \sqrt{3} \leq 2. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : Initialisée à partir de $n = 0$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2. \quad (\text{III.1})$$

De la propriété (III.1), on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \leq 2$.

Remarque

On en déduit aussi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 1 \geq 0$.

Attention

On ne connaît pas encore la limite qui n'est peut-être pas 2.

I.2 – Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du [paragraphe \(I.1\)](#), on recherche un intervalle I tel que :

1. $I \subset \mathcal{D}_f$.
2. $f(I) \subset I$
3. $u_0 \in I$

Un tel intervalle est appelé *intervalle de stabilité*.

Remarque : Trouver un segment $[a; b]$ sera notre saint graal.

Définition 1 – Intervalle stable :

On dit que l'intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ est *stable* par f si $f(I) \subset I$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,
- soit directement à l'aide d'inégalités.

Dans tous les cas et avant de commencer l'étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il est impératif de faire l'étude de f , d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.

Proposition 1 – Existence de la suite :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f .

Si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

 **Preuve :** Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{P}(n) : \text{«} u_n \text{ est bien définie et } u_n \in I \text{»}$$

- On a $u_0 \in I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons la propriété vraie au rang n .

On a par hypothèse de récurrence $u_n \in I \subset \mathcal{D}_f$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.

De plus, comme I est un intervalle stable, $u_{n+1} \in f(I) \subset I$. D'où la propriété au rang $n+1$ et l'hérédité.

On conclut par principe de récurrence. 

Exemple 2 :

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n + 1} \end{cases} \quad \text{où,}$$

 $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.

⚠ Attention

Les relations

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$$

ne définissent pas une suite !

x	-1	1	8	$+\infty$
f				$+\infty$

$0 \xrightarrow{\sqrt{2}} 3 \xrightarrow{\quad} +\infty$

Un intervalle de stabilité peut-être $[1; 8]$, $[-1; 8]$, $[1; +\infty[$ ou $[-1; +\infty[$ mais pas $[-1; 1]$ ou $[8; +\infty]$.

I.3 – Variations

Proposition 2 – Lien avec les fonctions monotones :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
 - Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si f est décroissante sur I , alors les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

Globalement, l'idée vient de la définition d'une fonction croissante :

« f est croissante si, et seulement si elle conserve l'ordre ».

Si, par exemple, $u_0 > u_1$ alors $f(u_0) > f(u_1)$, c'est-à-dire $u_1 > u_2$ puis $u_2 = f(u_1) > u_3 = f(u_2)$, ... $u_n = f(u_{n-1}) > u_{n+1} = f(u_n)$, ... et ainsi de suite pour tous les termes de la suite.

La suite est donc décroissante dans ce cas.

Preuve :

- Considérons une fonction quelconque f croissante sur son intervalle de définition et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que ses deux premiers termes soient, par exemple,

$$u_0 \leq u_1. \quad (\text{III.2})$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Posons donc la propriété $\mathcal{P}_n : u_n \leq u_{n+1}$.

Initialisation : D'après (III.2), $u_0 \leq u_1$ et $\mathcal{P}_0$ est réalisée.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour un certain entier $k > 0$ et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée sous cette hypothèse.

$u_k \leq u_{k+1}$	Hypothèse de récurrence	$\mathcal{P}_k$
$f(u_k) \leq f(u_{k+1})$	f est croissante donc conserve l'ordre	$\Downarrow$
$u_{k+1} \leq u_{k+2}$	Définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$\mathcal{P}_{k+1}$

La propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vérifiée. On a prouvé l'hérédité de la propriété.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$, initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

La démonstration est analogue pour une suite telle que $u_0 \geq u_1$ qui serait décroissante.

— Dans le cas d'une fonction décroissante, posons $g = f \circ f$. Cette application est croissante sur I.

Posons alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Les deux suites vérifient

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = g(u_{2n}) = g(v_n) \quad \text{et, de même,} \quad w_{n+1} = g(w_n).$$

Le point précédent permet alors d'en déduire que chacune des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

Supposons, par exemple, que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$.

En appliquant la fonction f décroissante, on en déduit :

$$f(v_n) \geq f(v_{n+1}) \iff w_n \geq w_{n+1}.$$

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Si l'on supposait que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante, on en déduirait de la même manière que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

En conclusion, les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire. 

Remarque : Les suites d'indice pair et impair sont donc associées à la fonction $g = f \circ f$ et définies par

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{2n+2} = g(u_{2n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 \\ u_{2n+3} = g(u_{2n+1}) \end{cases}.$$

ATTENTION

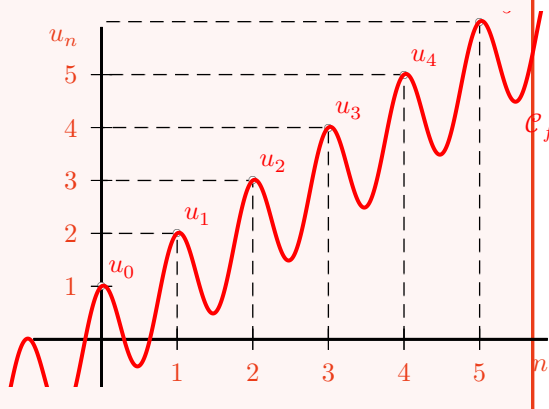
Pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$:

f (dé)croissante $\not\Rightarrow$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dé)croissante.

Considérez, par exemple, la fonction définie par $f(x) = x + \cos(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) \\ \quad = u_n + \cos(2\pi u_n). \end{cases}$$

Un rapide raisonnement par récurrence montrerait que $u_n = n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et pourtant, f ne l'est pas le moins du monde.



Exemple 3 :

Reprenons l'exemple (1) et l'exemple (2).

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on peut en déduire que :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (monotone) croissante car $u_0 = 1 \leq u_1 = \sqrt{2}$.
- la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (monotone) décroissante car $v_0 = 8 \geq v_1 = 3$.

Méthode 1 – Suite récurrente associée à une fonction décroissante :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

1. de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
2. d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:
 - si $g(u_0) - u_0 \geq 0$ (resp. ≤ 0), $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
 - si $g(u_1) - u_1 \leq 0$ (resp. ≥ 0), $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).

ATTENTION

Dans le cas où $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, on ne pourra pas en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Pour ce faire, il faudra, par exemple, montrer que ces deux suites sont adjacentes et/ou qu'elles convergent vers la même limite. Prouver une divergence pourra se faire en montrant qu'une sous-suite diverge ou que deux convergent vers des limites distinctes. Rien n'est, a priori, assuré.

I.4 – Convergence et point fixe**Définition 2 – Point fixe :**

Soit une fonction f définie sur un ensemble I .

On appelle *point fixe* de f sur I tout réel $x \in I$ vérifiant $f(x) = x$.

Pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ cela correspond aux abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

Proposition 3 – Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ \text{et} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f i.e. $f(\ell) = \ell$.

⚠ Attention

Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire sur la limite. Il ne permet en aucun cas de prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

💡 Idée

En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger.

🔗 Preuve : Supposons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers un réel ℓ .

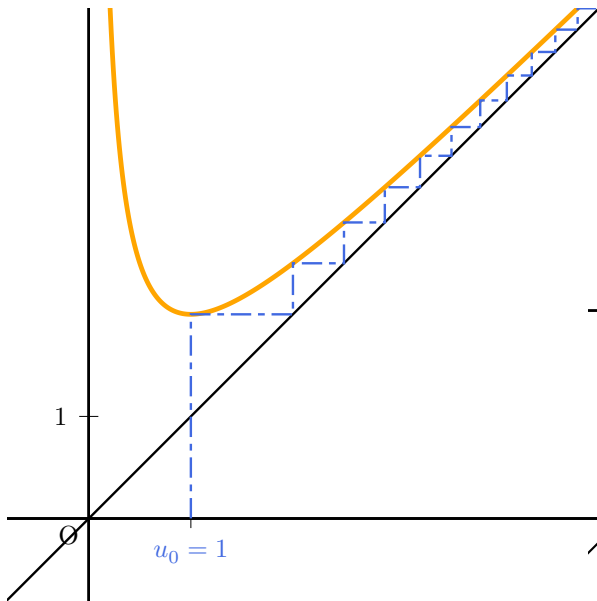


FIGURE III.4 : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = 1$.
 f n'a pas de points fixes et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

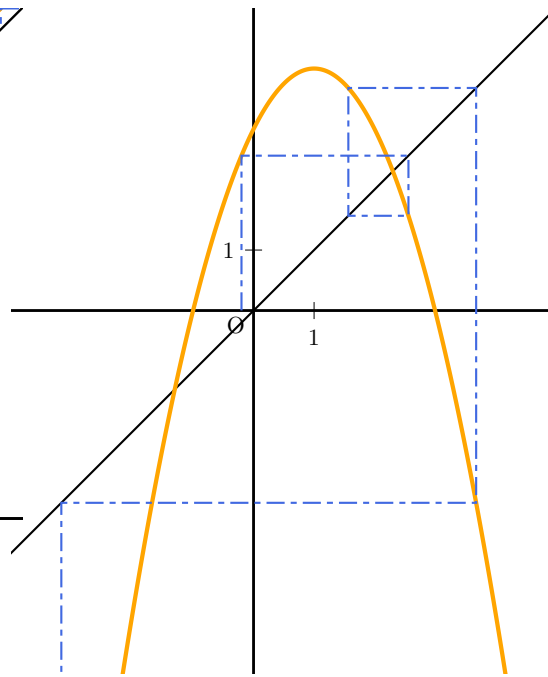


FIGURE III.5 : $u_{n+1} = (u_n + 1)(3 - u_n)$ avec $u_0 = -0,2$.
 f a deux points fixes et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

FIGURE III.6 : Exemples de suites divergentes

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \ell$.

Or, la fonction f est continue en $\ell \in I$ i.e. $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$.

Par composition, on en déduit que $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Donc $f(\ell) = \ell$ i.e. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.



ATTENTION

Si f n'est pas continue, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas forcément vers un point fixe de f .

Contre-exemple 4 :

Soient $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$ qui n'est pas un point fixe de f .

Idée

Pour déterminer les points fixes de f , on étudie les points d'annulation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur I .

Exemple 5 :

Revenons à l'exemple (2) et à l'exemple (1).

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, la limite ℓ de la suite vérifie $\sqrt{\ell+1} = \ell$.

D'où $\ell + 1 = \ell^2$ et $\ell \geq 0$.

Finalement, on obtient $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Remarque

Ce n'est pas 2 !

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent :

- Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g . Cela aidera pour d'éventuelles factorisation.

La réciproque est fautive : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f .

Contre-exemple 6 – L :

fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet deux points fixes 1 et -1 mais $f \circ f$ n'admet que 1 comme point fixe.

- Si les deux sous suites convergent vers le même point fixe, la suite mère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y converge aussi.

À défaut, si elles convergent vers deux points fixes différents, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

I.5 – L'inégalité des accroissements finis

On peut aussi utiliser dans certains cas l'inégalité des accroissements finis pour montrer que la distance entre u_n et sa limite possible ℓ tend vers 0. On en rappelle l'énoncé.

Théorème 4 – Inégalité des accroissements finis :

Si f est dérivable sur J , et s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in J$, $|f'(x)| \leq M$, alors

$$\forall (a, b) \in J^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Méthode 2 – Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide de l'IAF :

Pour montrer la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un point fixe $\ell \in J$ à partir de l'inégalité des accroissements finis, on procèdera ainsi :

1. on majore $|f'|$ par une constante M sur l'intervalle stable J contenant les termes de la suite. Il faut pour que cette méthode fonctionne que $0 \leq M < 1$.

2. on applique l'inégalité des accroissements finis à f avec $b = u_n$ et $a = \ell$ pour obtenir

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq M |u_n - \ell|.$$

3. on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$ ».

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ découle de l'inégalité des accroissements finis avec $a = \ell$ et $b = u_0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$. Alors on a :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq M |u_n - \ell| \leq M \times M^n |u_0 - \ell| = M^{n+1} |u_0 - \ell|.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, on a $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Si $M \in [0; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n |u_0 - \ell| = 0$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ par encadrement.

Calcul approché du point fixe : Si $J = [a, b]$, le calcul précédent nous donne une estimation de l'erreur :

$$|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell| \leq M^n |b - a|$$

Ainsi, u_n constitue une estimation du point fixe ℓ de f avec une précision au moins égale à $M^n |b - a|$.

II. PLAN D'ÉTUDE DES SUITES RÉCURRENTES D'ORDRE 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$, $J \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fausse.

- a. I est stable par f et contient au moins un terme de la suite à partir d'un certain rang. C'est la **proposition (1)**.

- b. I est un segment $[a; b]$ i.e. fermé (pour retenir les limites) et borné (pour pouvoir y appliquer les théorèmes de convergence monotone). À défaut, on devra parfois se contenter d'un intervalle semi-borné et/ou semi-fermé sur lequel on essaiera d'adapter ce qui suit.

2. Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant.

Remarque

On récupérera les éventuels points fixes au passage.

Remarque : Le signe de δ dépend de la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

3. I doit nécessairement contenir un ou des points fixes de f . C'est le contenu de la **proposition (3)**.

S'il n'en contient pas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Il restera à déterminer le type de divergence : un théorème de comparaison ou l'extraction de deux sous-suites divergeant/convergeant vers des limites différentes suffisent souvent à conclure.

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

4. a. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. *confer* le **paragraphe (I.5)**.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

- b. Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0 .

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement contractante !
- La fonction f peut avoir plusieurs points fixes !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante !

- c. Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4..A. sinon encore *confer* le **paragraphe (I.5)**.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

- i. Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ii. S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.

En général, vous rencontrerez deux cas de figure :

- ◇ les sous-suites sont adjacentes donc convergentes (vers le même point fixe) ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ◇ les sous-suites convergent vers deux points fixes différents : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

d. Dernier cas : on n'est dans aucun des cas précédents. Alors il faut réfléchir un peu ... faire preuve de jugeotte et d'initiative ... Étudier le signe de $f(x) - x$, ... L'énoncé vous aidera !

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0; 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que $[0; 1]$ est stable par f . En déduire une minoration de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 0.
4. Supposons maintenant $a < 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

1. Une étude rapide de la parabole $f : x \mapsto x - x^2 = x(1 - x)$ montre que l'intervalle $[0; 1]$ est stable par f . En particulier, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée, elle converge.
3. Comme f est continue, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger que vers les points fixes de f . 0 étant le seul, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Comme $]-\infty; 0[$ est stable par f et ne contient aucun point fixe, si $a \in \mathbb{R}_-^*$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne saurait converger. Elle diverge.

i Remarque

Comme $f([1; +\infty]) \subset \mathbb{R}_-^*$, on obtient également la divergence si $a > 1$.

INDEX

- Chaos, 2
- Continuité, 7
- Ensemble
 - stable, 4
- Fonction
 - monotone, 5
- Intervalle
 - stable, 4
- Méthode
 - Étude d'une suite récurrente, 7
- Point
 - fixe, 7, 11
- Suite
 - adjacente, 12
- Système
 - dynamique, 2