

Rappels d'analyse

Suites et séries réelles

LES suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul.

On en trouve, par exemple, chez Archimède, pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700av. J.-C. et plus récemment au I^{er} siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :

Pour extraire la racine carrée de A, choisir une expression arbitraire a et prendre la moyenne entre a et $\frac{A}{a}$ et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent

En notation moderne, cela définit la suite de nombres $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{A}{u_n} \right).$$

ON retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du XV^{ème} siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). Dans l'Encyclopédie Raisonée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur *convergence*.

C'EST ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites numérique ouvre la porte à bien d'autres notions séquentielle comme les suites de fonctions, séries, séries entières ou de Fourier. Voyez ce chapitre comme leur préambule.

*Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ».
Mais elles se font refouler à l'entrée...*

Plan du chapitre

I SUITES NUMÉRIQUES RÉELLES	2
I.1 VOCABULAIRE ET GÉNÉRALITÉS	2
I.2 PREMIÈRES SUITES USUELLES	3
I.3 SUITES BORNÉES	7
I.4 VARIATIONS	8
I.5 CONVERGENCE ET DIVERGENCE	9
I.6 OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES SUR LES LIMITES	16
I.7 SUITES EXTRAITES	20
I.8 THÉORÈMES D'EXISTENCE DE LIMITES	20
I.9 SUITES ADJACENTES	23
I.10 SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE DEUX	24
II SÉRIES NUMÉRIQUES RÉELLES	28
II.1 CONDITION NÉCESSAIRE DE CONVERGENCE	33
II.2 SÉRIES À TERME POSITIF	34
II.3 CONDITION SUFFISANTE DE CONVERGENCE	35
INDEX	37

I. SUITES NUMÉRIQUES RÉELLES

I.1 – Vocabulaire et généralités

Définition 1 – Suite réelle :

Une *suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Une *suite numérique* est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

À chaque *indice* $n \in \mathbb{N}$ on associe un nombre u_n appelé *terme* de rang n de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque : Fondamentalement, cela ne change rien de considérer une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang n_0 .

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rencontrées sont définies :

— de manière *explicite* : $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$.

Le terme de rang n est directement obtenu en fonction de n .

C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle que l'on cherchera à obtenir le plus souvent.

Attention

$$u_n \neq (u_n)_{n \in \mathbb{N}}!$$

— de manière *récurrente* : $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}. \end{cases}$ Le terme de rang $n + 1$ est obtenu en fonction du terme précédent.

C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite et souvent celle qu'obtiennent nos chers physiciens.

Il pourra arriver qu'une suite soit définie par récurrence double (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n), auquel cas il faudra préciser les valeurs de u_0 et u_1 , voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare !).

— de manière *implicite* : $e^{u_n} - u_n - 2 = n$.

Le terme de rang n est défini comme solution d'une équation voire en fonction de u_{n+1} .

Pas vraiment extrêmement pratique pour les calculs et on n'arrive pas toujours à obtenir une formule explicite comme pour les primitives. Dans ce cas, on arrive quand même à étudier la suite à l'aide d'études de fonctions.

L'ensemble des suites réelles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est naturellement muni d'opérations de somme (on additionne les deux suites terme à terme), de produit et de produit par un réel :

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et on dit que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre commutative.

I.2 – Premières suites usuelles

Définition 2 – Suite arithmétique et géométrique :

Suite arithmétique : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe un scalaire r , appelé *raison*, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe un scalaire q , appelé *raison*, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q.$$

Suite arithmético-géométrique : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe un couple $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, la suite arithmético-géométrique précédente est une suite arithmétique, géométrique si $b = 0$.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ($m < n$)	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \frac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n - m)r$	$(n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$

FIGURE I.1 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

 **Preuve :** Histoire de réviser le raisonnement par récurrence, montrons le dernier résultat.

On suppose $m \in \mathbb{N}$ fixé et on montre que la propriété $\mathcal{P}_n : u_m + \dots + u_n = (n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ plus grand que m .

1. Pour $n = m$, on a bien $(\cancel{X} - \cancel{X} + 1) \times \frac{u_m + u_m}{2} = 1 \times \frac{\cancel{X} u_m}{\cancel{X}} = u_m$ donc $\mathcal{P}_m$ est vérifiée.
2. Supposons qu'il existe un entier $k > m$, tel que $\mathcal{P}_k$ soit vérifiée i.e.

$$u_m + \dots + u_k = (k - m + 1) \times \frac{u_m + u_k}{2}.$$

Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée sous cette hypothèse i.e.

$$u_m + \dots + u_k + u_{k+1} = (k + 1 - m + 1) \times \frac{u_m + u_{k+1}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } u_m + \dots + u_k + u_{k+1} &= (k - m + 1) \times \frac{u_m + u_k}{2} + u_{k+1} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_k) + 2u_{k+1}}{2} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_k) + u_{k+1} + u_m + (k + 1 - m)r}{2} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_k + r) + u_{k+1} + u_m}{2} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_{k+1}) + u_{k+1} + u_m}{2} \\ &= \frac{(k - m + 2)(u_m + u_{k+1})}{2}. \end{aligned}$$

La relation $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vérifiée et la propriété est héréditaire.

3. La propriété $\mathcal{P}$ est donc initialisée au rang m et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, plus grand que m .



Méthode 1 – Montrer qu'une suite est arithmétique :

Une suite est arithmétique si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r , on exprime, pour n quelconque, $u_{n+1} - u_n$ indépendamment de n .
- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique, on trouve deux entiers m et n tels que $u_{m+1} - u_m \neq u_{n+1} - u_n$.

Exemple 1 :

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 2$ et $z_{n+1} = 2z_n + 2^n$ pour tout $n \geq 0$.

Montrons que la suite de terme général $t_n = \frac{z_n}{2^n}$ est arithmétique.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, t_{n+1} - t_n = \frac{z_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{z_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} z_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} z_n = \frac{1}{2}.$$

La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $t_0 = \frac{z_0}{2^0} = 2$
i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 2 + \frac{1}{2}n$.

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = 2^n t_n = 2^{n+1} + n2^{n-1}.$$

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ($m < n$)	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\frac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n-m+1)$ si $q = 1$. $u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

FIGURE I.2 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

 **Preuve :** De même pour une suite géométrique de raison q , le raisonnement est identique en plus facile.

On pose :

$$\mathcal{P}_n : u_m + \dots + u_n = u_m \times \frac{1-q^{n+1-m}}{1-q}$$

pour $q \neq 1$, le cas $q = 1$ étant trivial.

1. Pour $n = m$, on a : $u_m \times \frac{1-q^{m+1-m}}{1-q} = u_m \times \frac{1-q}{1-q} = u_m$. La propriété est initialisée.
2. Supposons qu'il existe un entier $k > m$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vérifiée. On a alors :

$$\begin{aligned}
 u_m + \dots + u_k + u_{k+1} &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m}}{1-q} + u_{k+1} \\
 &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m}}{1-q} + u_{k+1} + q^{k+1-m} u_m \\
 &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m} + (1-q)q^{k+1-m}}{1-q} \\
 &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m} + q^{k+1-m} - q^{k+1-m+1}}{1-q} \\
 &= u_m \times \frac{1-q^{k+2-m}}{1-q}.
 \end{aligned}$$

La relation $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie sous l'hypothèse $\mathcal{P}_k$. La propriété est héréditaire.

3. Initialisée au rang m et héréditaire, la relation $\mathcal{P}$ est donc vraie pour tout $n \geq m$.



Méthode 2 – Montrer qu'une suite est géométrique :

Une suite est géométrique si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q , on montre que u_n n'est jamais nul et on exprime, pour n quelconque, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ indépendamment de n .
- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, on montre que u_n s'annule pour un certain n ou on trouve deux entiers m et n tels que $\frac{u_{m+1}}{u_m} \neq \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Théorème 1 – Suite arithmético-géométrique :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c \quad \text{avec} \quad c = \frac{b}{1-a}.$

Preuve :

1. On commence par résoudre l'équation $x = ax + b$ dont l'unique solution est

$$c = \frac{b}{1-a}.$$

Remarque : c est appelé « point invariant » ou « point fixe » de la fonction f associée à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$x \mapsto ax + b$. On verra plus tard que c est l'unique candidat à la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. On introduit alors la suite auxiliaire $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - c.$$

- a. La $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

En effet, des deux équations :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & au_n + b \\ c & = & ac + b \\ \hline u_{n+1} - c & = & a(u_n - c) \end{array}$$

on obtient, par soustraction $v_{n+1} = av_n$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - c$.

- b. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - c).$$

3. On revient enfin à la suite initiale : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + c$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c \quad \text{avec} \quad c = \frac{b}{1-a}.$

Remarque : La démonstration montre que la suite définie par $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique de raison a . 

Méthode 3 – Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique :

En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x$.
2. Vérification que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - c$ est une suite géométrique.

3. Conclusion : expression du terme général u_n .

I.3 – Suites bornées

Définition 3 – Suites réelles majorées, minorées, bornées :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- *majorée* s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- *minorée* s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

⚠ Attention

Les majorants (ou mineurs) d'une suite sont, par définition des constantes. Une majoration (une minoration) de u_n par un réel **qui dépend** de n ne montre **PAS** que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (ou minorée).

Exemples 2 :

- La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par -1 . Elle est donc bornée.
- La suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.

En revanche, elle n'est pas majorée (et donc non bornée).

- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Méthode 4 – Encadrer une suite :

Avant de se lancer, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

- En général, on étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - M$.
- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser le tableau de variations de la fonction f pour montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée.
- Si le terme général est donné sous la forme d'un quotient, on peut majorer/minorer numérateur et dénominateur.

Méthode 5 – Suite non majorée :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée :

- On se donne un réel A quelconque.
- On montre que l'on peut toujours trouver un terme de la suite plus grand que A en résolvant, par exemple, l'inéquation $u_n \geq A$.

I.4 – Variations

⚠ Attention

Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes, ni monotones, ni rien.

i Remarque

On parlera aussi de suites *strictement monotones* lorsque les inégalités larges ci-contre seront remplacées par des inégalités strictes.

Définition 4 – Suites monotones :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- *décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
- *stationnaire* si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite *monotone*.

Exemples 3 :

E1 • $u_n = (-1)^n$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$, $u_n = \tan(n)$ ne sont pas monotones.

E2 • La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \prod_{k=0}^n (100 - k)$ est stationnaire à 0 à partir du rang $n = 100$.

Exemple 4 – Suite stationnaire :

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 0$, on pose $u_n = \cos\left(\frac{2\pi n!}{p!}\right)$.

Justifions que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

Pour tout n supérieur à p , $\frac{n!}{p!} = (p+1) \dots (n-1)n \in \mathbb{N}$ et $\frac{2\pi n!}{p!} \equiv 0 \pmod{2\pi}$ donc $u_n = 1$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc stationnaire à partir du rang p .

Proposition 2 – Suites arithmétique et géométrique :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

P1 • Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :

- (1). si $r \geq 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
- (2). si $r = 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante,
- (3). si $r \leq 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,

P2 • Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :

- (1). Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
- (2). si $u_0 \geq 0$ et $q > 1$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (strictement si $u_0 > 0$).
- (3). Si $q = 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à u_0 .
- (4). Si $u_0 \geq 0$ et $0 < q < 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (strictement si $u_0 > 0$).
- (5). Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

À retenir

- Une suite arithmétique est donc monotone dans tous les cas.
- Si elle n'est pas constante, une suite géométrique est toujours strictement monotone.

Comparer deux termes d'une suite est difficile à faire directement. On se ramène donc encore à comparer leur différence à 0 ou leur quotient à 1.

Méthode 6 – Montrer qu'une suite est croissante :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante :

- On exprime $u_{n+1} - u_n$, on factorise, réduit au même dénominateur, ...
- À l'aide d'un tableau de signes, on montre que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Méthode 7 – Montrer qu'une suite est croissante :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous forme multiplicative et à termes strictement positifs est croissante :

- On exprime $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, on factorise, simplifie majeure, minore, ...
- On montre le numérateur est plus grand que le dénominateur i.e. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Exemple 5 – Suite croissante :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Démontrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geq 0.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

I.5 – Convergence et divergence

Il est temps de s'intéresser au comportement d'une suite lorsque $n \rightarrow +\infty$ i.e. son *comportement asymptotique*.

Deux cas, opposés l'un de l'autre se présentent : les suites convergentes et les suites divergentes. Parmi ces dernières, les divergentes vers l'infini et celle n'ayant pas de limites.

Définition 5 – Limite d'une suite réelle :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

[D1] • On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_o(V_\ell) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \in V_\ell.$$

En particulier :

(1). On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

⚠ Attention

Le contraire de convergent n'est pas divergent vers l'infini !

(2). On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *divergente* vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o(A) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \Rightarrow u_n \geq A.$$

(3). On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *divergente* vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o(A) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \Rightarrow u_n \leq A.$$

D2 • On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge* si elle ne converge pas.

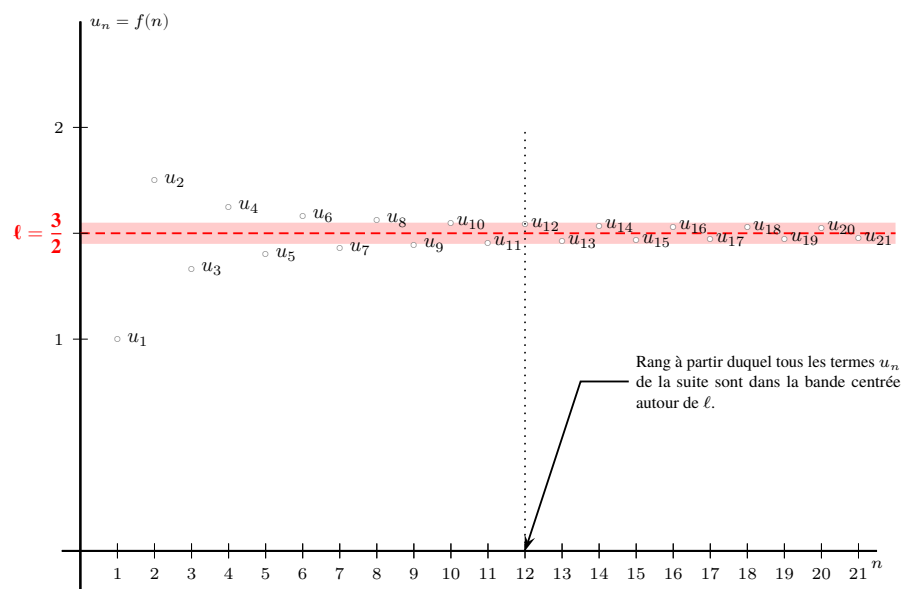


FIGURE I.3 : La suite définie par $u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n}$ converge vers $\ell = \frac{3}{2}$.

Rappel :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon] \Leftrightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon.$$

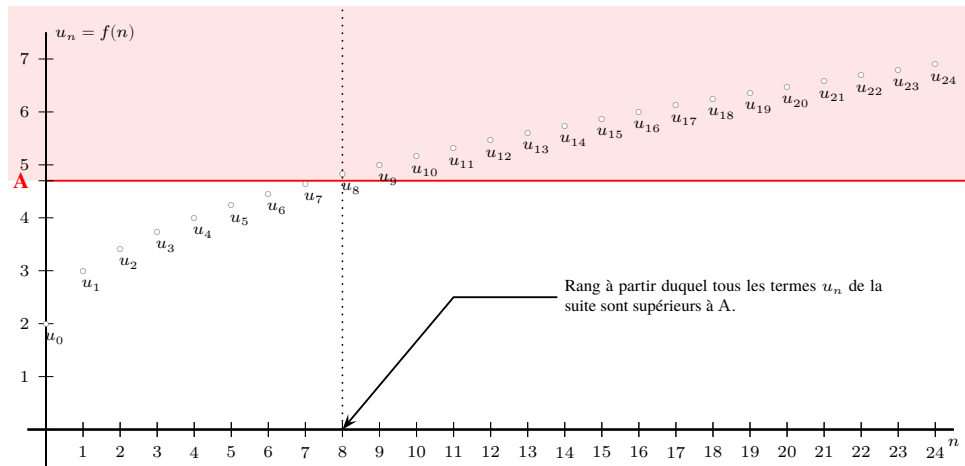
Exemple 6 – Une suite sans limite :

La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

En effet, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend que les valeurs 1 et -1 donc ne peut converger que vers une de ces valeurs.

Comme $\left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$ est un voisinage de 1 ne contenant pas $u_{2n+1} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger vers 1. De même avec $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right]$ et $u_{2n} = 1$, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger vers -1 .

FIGURE I.4 : La suite définie par $u_n = \sqrt{n} + 2$ diverge vers $+\infty$.

Remarques : Le comportement asymptotique d'une suite ne dépend que du comportement de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple 7 :

La suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Tout intervalle $[-a; a]$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$, contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor + 1$.

Corollaire 3 – Suite à valeurs entières :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si elle est stationnaire.

Remarque

Le résultat est bien entendu faux pour les suites réelles : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, or elle n'est pas stationnaire.

Preuve :

($\Leftarrow$) : Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit stationnaire, et montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Par définition d'une suite stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq N, u_n = a$.

On a donc $\forall n \geq N, |u_n - a| = 0$. Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, |u_n - a| < \varepsilon$.

On a prouvé que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - a| < \varepsilon$. La suite converge donc.

($\Rightarrow$) : On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrons qu'elle est stationnaire.

Soit ℓ sa limite.

— Montrons que $\ell \in \mathbb{Z}$.

Par l'absurde, supposons que $\ell \notin \mathbb{Z}$. En ce cas, on a $[\ell] < \ell < [\ell] + 1$.

On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ ne contienne aucun entier.

C'est absurde car il doit contenir tous les u_n .

On peut prendre $\varepsilon = \min\left(\frac{\ell - [\ell]}{2}, \frac{[\ell] + 1 - \ell}{2}\right)$.

— On sait désormais que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{Z}$. Montrons qu'elle est stationnaire en ℓ .

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{10}$ i.e. $u_n \in \left[\ell - \frac{1}{10}, \ell + \frac{1}{10}\right]$.

Mais par ailleurs, l'intervalle $u_n \in \left[\ell - \frac{1}{10}, \ell + \frac{1}{10}\right]$ ne contient qu'un seul entier (ℓ) et u_n est entier.

D'où $\forall n \geq N$, $u_n = \ell$. On a prouvé que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien stationnaire.



Proposition 4 – Convergence par majoration :

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ .

Preuve : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un rang n_1 à partir duquel $\alpha_n \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq \max(n_0; n_1)$, on a donc $|u_n - \ell| \leq \alpha_n \leq \varepsilon$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .



Proposition 5 – Suites de référence :

P1 • $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

P2 • $\forall q \in]-1; 1[$, $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Preuve :

1. a. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left|\frac{1}{n^p}\right| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{e^{p \ln(n)}} \leq \varepsilon \iff_{\varepsilon > 0} p \ln(n) \geq -\ln(\varepsilon) \iff_{p > 0} n \geq e^{-\frac{1}{p} \ln(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$.

b. Soit $A \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralités, on peut supposer $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|n^p| \geq A \iff e^{p \ln(n)} \geq A \iff_{A > 0} p \ln(n) \geq \ln(A) \iff_{p > 0} n \geq e^{\frac{1}{p} \ln(A)} = \sqrt[p]{A}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \sqrt[p]{A} \right\rfloor + 1$.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $q = 0$, le résultat est clair. Sinon, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ implique

$$|q^n| = |q|^n \leq \varepsilon \iff n \ln |q| \leq \ln(\varepsilon) \iff_{|q| < 1} n \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln |q|}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln |q|} \right\rfloor + 1$.



Corollaire 6 – Divergence des suites arithmétiques :

Une suite arithmétique de raison r diverge (vers $\pm\infty$) si, et seulement si $r \neq 0$.

Théorème 7 – Unicité de la limite :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

On peut donc légitimement parler de LA limite d'une suite convergente.

Par la contraposée, si une suite possède plusieurs limites^[1] alors elle diverge.

Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ qui possède deux valeurs d'adhérence 1 et -1 est divergente.

Preuve : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente. Supposons qu'elle admette deux limites distinctes ℓ et ℓ' et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|\ell - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'|.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

— Par convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ , $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1 \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

— Par convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ' , $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_2 \implies |u_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq n_0 = \max(n_1; n_2)$, $|\ell - \ell'| \leq \varepsilon$. Majoration vraie pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\ell = \ell'$. ✓

Idée

Si vous n'êtes pas convaincus, posez $\varepsilon < \frac{|\ell - \ell'|}{2}$.

Proposition 8 – Limite et relation d'ordre :

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Preuve : Posons $\varepsilon = 1$. Alors il existe un $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq 1$.

D'où $\forall n \geq n_0$, $|u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|$ d'après l'inégalité triangulaire.

Posons $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, 1 + |\ell|)$.

On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. ✓

ATTENTION

La réciproque est encore fausse toujours en considérant $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exemple 8 – L :

suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie $\forall n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (1 + i)^n$ diverge.

Petit corollaire intéressant pour montrer, par exemple, qu'une suite convergeant vers un réel non nul est non nulle du même signe à partir d'un certain rang.

[1]. En mathématiques, on parle plutôt de valeurs d'adhérence. C'est mieux que de parler de plusieurs limites alors que l'on vient de dire qu'elle était unique.

Corollaire 9 :

- C1** • Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement positif ou divergeant vers $+\infty$ est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell > 0 \implies \exists m \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m > 0.$$

- C2** • Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement négatif ou divergeant vers $-\infty$ est majorée par un réel M strictement négatif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell < 0 \implies \exists M \in \mathbb{R}_-^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M < 0.$$

Preuve :

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il suffit de prendre $A = 1$ pour avoir $u_n \geq 1 > 0$ dès que $n \geq n_0(A)$ donné par la divergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, prenons $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$.

$$\text{Il existe alors un rang } n_0 \text{ au delà duquel } -\frac{\ell}{2} \leq u_n - \ell \leq \frac{\ell}{2} \implies 0 < \frac{\ell}{2} \leq u_n.$$

Ainsi, dans les deux cas, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.

- Identique

**Théorème 10 – Limites et inégalités strictes :**

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ et $m, M \in \mathbb{R}$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < M$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < M$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > m$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > m$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le corollaire (9) aux suites $u_n - M$ et $u_n - m$.

**Théorème 11 – Limites et inégalités larges :**

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Remarque

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.

Attention

C'est **TRÈS** faux avec des inégalités STRICTES ! Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Exemple 9 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente avec $u_n \leq A$ à partir d'un certain rang.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq A.$$

Théorème 12 – Composition à gauche par une fonction :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I .

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \bar{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Exemples 10 – Importants :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
- Si f est continue en a et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$.

En appliquant le théorème précédent aux fonctions de référence, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

$$\text{— } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0. \qquad \text{— } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty. \qquad \text{— } \dots$$

Exemples 11 :

- ◇ $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.
- ◇ Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0$ alors $u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de n .
- ◇ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- ◇ $n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

ATTENTION

Les derniers exemples montrent que 1^∞ est une forme indéterminée :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{cases} \quad \text{ne permet pas de conclure} \quad u_n^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

De même ∞^0 est une forme indéterminée :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \quad \text{ne permet pas de conclure} \quad u_n^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

En tout état de cause, il faudrait en rajouter d'autres : 0^0 , 0^∞ et ∞^∞ que nous traiterons au cas par cas en nous ramenant aux précédentes.

En composant avec les limites usuelles de fonctions et en remarquant que $t^n = e^{n \ln t}$ pour $t > 0$, on retrouve encore les limites usuelles.

Corollaire 13 – Limites usuelles et croissances comparées :**Puissances de n :** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha$	0	1	$+\infty$

Croissances comparées : Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $q > 1$ et $x \in]-1; 1[$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x^n = 0$
---	---	---

I.6 – Opérations algébriques sur les limites

Un peu d'histoire : Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII^{ème} siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :

- Montrer l'efficacité de notre définition de limite.
- Justifier la validité de notre intuition.
- Servir de modèle de démonstration pouvant être utilisé dans des cas plus complexes.

Les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitifs et parfaitement déterminés.

Proposition 14 – Stabilité algébrique :Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites ℓ et ℓ' .**Somme :**Si $\ell + \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell + \ell'$.**Multiple :**Si $\lambda \cdot \ell$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\lambda \cdot u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \cdot \ell$.**Produit :**Si $\ell \times \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n \times v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \times \ell'$.**Inverse :**Si $\frac{1}{\ell}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie et $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\ell}$.**Quotient :**Si $\frac{\ell}{\ell'}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie et $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\ell}{\ell'}$.**⚠ Attention**

Les opérations $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$, $0 \times (-\infty)$, $\frac{0^\pm}{0^\pm}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(0^\pm)^{\pm\infty}$ et $(\pm\infty)^{0^\pm}$ ne sont pas définies et appelées « formes indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'il faudra... déterminer.

📌 À retenir

En particulier, l'ensemble des suites convergentes contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires. C'est un espace vectoriel. Dans la même idée, l'opérateur $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

⚠ Attention

L'ensemble des suites divergentes N'EST PAS stable par combinaisons linéaires.

Exemples 12 :

$$\boxed{\text{E1}} \cdot u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pm\infty \implies \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$\boxed{\text{E2}} \bullet u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies \left| \frac{1}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Preuve :

Somme :

- Somme de deux limites finies ℓ et ℓ' : Soit $\varepsilon > 0$.

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|.$$

Il suffit alors de prendre $N = \max \left(n_{0,u_n} \left(\ell, \frac{\varepsilon}{2} \right); n_{0,v_n} \left(\ell', \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$.

- Somme d'une limite finie ℓ et d'une limite $+\infty$: On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < 1$ à partir d'un certain rang $n_0(1)$, donc, en particulier :

$$\forall n \geq n_0, u_n > \ell - 1.$$

De même, pour $n \geq n_1(A - \ell + 1)$, $v_n > A - \ell + 1$.

Pour $n \geq N = \max(n_0; n_1)$, on a donc :

$$u_n + v_n \geq (\ell - 1) + (A - \ell + 1) = A.$$

- Somme de deux limites $+\infty$: Soit $A > 0$ et posons $N = \max \left(n_{0,u_n} \left(\frac{A}{2} \right); n_{0,v_n} \left(\frac{A}{2} \right) \right)$.

Alors, pour $n \geq N$, $u_n + v_n \geq A$.

Produit et multiple :

- Produit de deux limites finies ℓ et ℓ' : Soit $\varepsilon > 0$.

$$|u_n v_n - \ell \ell'| \leq |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell||v_n| + |\ell||v_n - \ell'|.$$

Or, d'après la **proposition (8)**, la suite convergente $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, disons par un réel $K > 0$.

Il suffit alors de prendre $N = \max \left(n_{0,u_n} \left(\ell, \frac{\varepsilon}{2K} \right); n_{0,v_n} \left(\ell', \frac{\varepsilon}{2|\ell|} \right) \right)$.

Remarque : Si jamais il arrivait que ℓ ou K soient nuls, il suffirait de prendre respectivement $n_{0,v_n} \left(\ell', \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} \right)$ ou $n_{0,u_n} \left(\ell, \frac{\varepsilon}{2(K + 1)} \right)$ sans que l'inégalité finale ne soit changée.

- Produit d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et d'une limite $+\infty$: On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang $n_0 \left(\frac{\ell}{2} \right)$, donc, en particulier :

$$\forall n \geq n_0, u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0.$$

De même, il existe un rang $n_1 \left(\frac{2A}{\ell} \right)$ à partir duquel $v_n > \frac{2A}{\ell} > 0$.

Pour $n \geq N = \max(n_0; n_1)$, en multipliant membre à membre deux inégalités de même sens strictement positives, on a donc :

$$u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell} = A.$$

- Produit de deux limites $+\infty$: Soit $A > 0$ et posons $N = \max \left(n_{0,u_n} \left(\sqrt{A} \right); n_{0,v_n} \left(\sqrt{A} \right) \right)$.

Alors, pour $n \geq N$, $u_n v_n \geq A$.

Il suffira de considérer $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme la suite constante à λ pour avoir la limite de la suite $(\lambda \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour peu que $\lambda \cdot \ell$ soit défini dans $\mathbb{R} \cup \{0^+, 0^-\}$.

Quotient :

- Inverse d'une limite non nulle ℓ : Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ d'après le [corollaire \(9\)](#).

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| |\ell|}.$$

Par définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq n_1 \implies |u_n - \ell| \leq \min \left(\frac{|\ell|}{2}, \frac{|\ell|^2 \varepsilon}{2} \right).$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire, pour $n \geq n_1$:

$$||\ell| - |u_n|| \leq |u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2} \implies |u_n| \geq |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}.$$

Il suffit alors de prendre $N = \max(n_0; n_1)$, pour avoir :

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| |\ell|} \leq \frac{\frac{|\ell|^2 \varepsilon}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon.$$

- Inverse d'une limite infinie : On suppose $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} u_n = +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_1 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$ à partir duquel $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Pour $n \geq N = \max(n_0; n_1)$, on a donc :

$$\left| \frac{1}{u_n} \right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon.$$

- Inverse d'une limite nulle d'une suite strictement positive : On suppose $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Soit $A > 0$. Il existe un rang $n_1 \left(\frac{1}{A} \right)$ à partir duquel $|u_n| < \frac{1}{A}$.

Pour $n \geq N = \max(n_0; n_1)$, on a donc :

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} > A.$$



Exemple 13 – Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$:

E1 • On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \ell) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n + \ell) - n) = \ell$.

E2 • On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - n) = +\infty$.

⚠ Attention

$(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut avoir une limite sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- E3** • On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + (-1)^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + (-1)^n - n)$ n'a pas de limite.

Exemple 14 – Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$:

- E1** • On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{n} \times n = \ell$.
- E2** • On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times n^2 = +\infty$.
- E3** • On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} \times n$ n'a pas de limite.

⚠ Attention

$(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ peuvent avoir des limites sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On résume tous ces résultats dans un tableau :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$\ell \neq 0$	0	∞	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	0	$\ell' \neq 0$	0	∞	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$\ell + \ell'$	ℓ	0	∞	$+\infty$	F.I.	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n =$	$\ell \times \ell'$	0	∞	F.I.	∞	F.I.	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	F.I.	∞	0	F.I.	

Méthode 8 – Techniques pour lever une F.I. :

Afin de lever une F.I., on pourra penser à utiliser l'une des méthodes (plus généralement une combinaison des méthodes) suivantes.

- M1** • Les développements limités sont la méthode à privilégier et devraient arriver à déterminer toutes les limites que vous rencontrerez.
- M2** • Penser à la quantité conjuguée lorsqu'il y a des racines.
- M3** • Pour les fonctions puissances : retour à la définition à l'aide des fonctions exp et ln.
- M4** • Penser aux croissances comparées.
- M5** • Factoriser par le terme dominant *i.e.* celui qui tend le plus vite vers $\pm\infty$ ou le moins vite vers 0. Cela revient à trouver un équivalent simple de la suite.
- M6** • Utilisation d'inégalités précédemment démontrées. Le théorème d'encadrement est souvent utilisé pour déterminer un équivalent ou pour montrer qu'une suite tend vers 0.
- M7** • Utilisation du taux d'accroissement.

I.7 – Suites extraites

Théorème 15 – Suite extraite :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- T1** • Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ alors toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers cette même limite ℓ .
- T2** • Réciproquement, si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Attention

La convergence d'une ou plusieurs suites extraites n'est en général pas suffisante pour assurer la convergence d'une suite.

En pratique, ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite.

Remarque : Si le comportement de la suite initiale détermine le comportement d'une suite extraite, la réciproque est beaucoup plus délicate. Une suite extraite ne pouvant, par nature, fournir qu'une information partielle sur la suite totale.

Méthode 9 – Montrer qu'une suite diverge à l'aide de suites extraites :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour montrer qu'elle diverge, on peut :

- M1** • Trouver une sous-suite qui diverge vers $\pm\infty$.
- M2** • Trouver deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes.

I.8 – Théorèmes d'existence de limites

L'existence d'une limite n'est JAMAIS acquise.

Les théorèmes qui suivent gagnent à être connus comme de vrais théorèmes d'existence. Ce qu'ils nous fournissent de façon essentielle, ce n'est pas tant la VALEUR d'une limite que son EXISTENCE.

Théorème 16 – de comparaison et d'encadrement :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

Théorème d'encadrement :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \ell$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leq u_n \leq M_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Théorème de minoration : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leq u_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème de majoration : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = -\infty$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Preuve :

Théorème d'encadrement : Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $V_\ell = [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$ un voisinage de ℓ .

La suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Il existe donc un rang $n_1(\varepsilon, \ell, m_n)$ à partir duquel tous les termes $m_n \in V_\ell$.

De même pour la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ il existe un rang $n_2(\varepsilon, \ell, M_n)$ à partir duquel tous les termes $M_n \in V_\ell$.

Pour $n \geq N = \max(n_0, n_1, n_2)$, on a donc

$$\ell - \varepsilon \leq m_n \leq u_n \leq M_n \leq \ell + \varepsilon.$$

Tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent donc aussi à V_ℓ à partir d'un certain rang N i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Théorème de minoration : Soit A un réel quelconque.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$, il existe un entier $n_1(A, m_n)$ tel que si $n \geq n_1$ alors $m_n \in [A; +\infty[$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leq u_n$.

Donc si $n \geq \max(n_0, n_1)$ alors $A \leq m_n \leq u_n \in [A; +\infty[$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème de majoration : Identique.



i Remarque

Ne prenez pas le théorème d'encadrement pour un simple passage à la limite dans des inégalités larges.

Quand on passe à la limite dans une inégalité, on sait déjà que son membre de gauche et son membre de droite ont une limite.

Or, dans le théorème d'encadrement au contraire, seules les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$ sont réputées exister au départ et l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ en découle.

Lemme 17 :

Soit $q \in \mathbb{R}$.

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	n'existe pas

Preuve :

Si $q > 1$: $\forall n \geq 2, q^n = ((q-1)+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{(q-1)^k}_{\geq 0} = 1 + n(q-1) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (q-1)^k \geq n(q-1)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(q-1) = +\infty$ car $q > 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ d'après le **théorème (16)** de comparaison.

Si $|q| < 1$: Il suffit de poser $Q = \frac{1}{|q|}$. Comme $-1 < q < 1$ alors $Q > 1$.

D'après la démonstration précédente, la suite $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge donc vers $+\infty$.

D'après les relations sur les limites de quotients, la suite $\left(\frac{1}{Q^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers 0 et le résultat est prouvé.

Si $q = 1$: Relativement évident.

Si $q < -1$: Il suffit de regarder les suites extraites $(q^{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(q^{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ qui divergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. La suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc divergente.



Exemple 15 – Le grand classique :

Si $x \in]-1; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$.

$$\text{D'où, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q alors $u_n = u_0 q^n$. Le lemme précédent permet donc de trouver sa limite :

Corollaire 18 – Limite d'une suite géométrique :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

- Si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0, \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$
- Si $q = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.
- Si $q \leq -1$ et $u_0 \neq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Le **théorème (16)** d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 19 – Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

 **Preuve :** Soit donc K un majorant de la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a immédiatement $0 \leq |\varepsilon_n u_n| \leq K |\varepsilon_n|$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} K |\varepsilon_n| = 0$, d'après le théorème d'encadrement on obtient le résultat. 

Le théorème de la limite monotone est LE théorème d'EXISTENCE par excellence.

Théorème 20 – Limite monotone :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

Plus précisément,

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

À retenir

Si une suite monotone est bornée elle convergera, sinon elle divergera vers $\pm\infty$. Ce théorème donne toute sa force et leur importance aux suites monotones.

Attention

Ce théorème est un théorème d'existence, il justifie l'existence d'une limite finie mais ne précise pas cette limite mais seulement que c'est sa borne supérieure.

 **Preuve :**

1. Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et majorée, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, un réel strictement positif quelconque et notons $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$, le plus petit des majorants de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a déjà, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M < M + \varepsilon$.
 - Tout intervalle $[M - \varepsilon; M + \varepsilon]$ contient au moins un terme u_p de la suite. Sinon, $M - \varepsilon < M$ serait un majorant de la suite, ce qui contredit le fait que M soit le plus petit des majorants.
 - Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p \geq M - \varepsilon$.
 - L'intervalle $[M - \varepsilon; M + \varepsilon]$ contient donc tous les termes de la suite à partir du rang p . Ceci est vrai, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$.
 - La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite M .

La démonstration est identique pour une suite décroissante et minorée.
2. Soit A un nombre réel quelconque.
 - Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on peut trouver un entier p tel que $u_p \geq A$.

— La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$ d'où $u_n \geq A$.

En conclusion, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, il suffira de considérer la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est croissante puis appliquer les propositions précédentes. 

ATTENTION

Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ mais ne donne pas la valeur de cette limite. On peut seulement dire que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M alors $\ell \leq M$ et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par m alors $\ell \geq m$.

i Remarque

La suite a une infinité de majorants ou de minorants suivant les cas mais un seul est sa limite. La question et la difficulté sont de la trouver.

Ici encore, on voit une grande différence entre la question de prouver l'existence théorique et la recherche pratique de la dite limite qui peut demander à mettre en œuvre une quantité incommensurable de techniques qui feront les joies de vos devoirs de concours.

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fautive : si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ pour s'en convaincre.

De même, toute suite croissante majorée, donc convergente, sera un contre-exemple à une suite croissante qui ne diverge pas nécessairement vers $+\infty$ si on enlève la condition « non majorée ».

Enfin, il n'est pas nécessaire d'être monotone pour converger comme la suite définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$.

I.9 – Suites adjacentes

Définition 6 – Suites adjacentes :

Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si et seulement si :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

i Remarque

La définition impose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Théorème 21 – Théorème des suites adjacentes :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers une même limite. ^[2]

i Remarque

Le **théorème (21)** a de nombreuses applications.

Preuve :

— Montrons tout d'abord que les deux suites sont convergentes.

Considérons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par exemple. Celle-ci étant croissante, il suffit de montrer qu'elle est majorée.

D'après la remarque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

[2]. Pas de soirée « no limit » pour nos suites adjacentes !

Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq v_0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée.

D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers une limite ℓ .

On montre de même que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ' .

— Enfin l'assertion $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0 \iff \ell - \ell' = 0$ entraîne que les deux suites convergent vers la même limite.



Remarque : En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$: u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ , respectivement par défaut et par excès à $v_n - u_n$ près.

Exemple 16 – Une série célèbre :

À l'aide des suites $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ définies pour $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

montrons que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge.

Il suffit de montrer que les suites $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1. \quad S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0 \text{ donc } (S_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante.}$$

$$2. \quad T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} - \frac{1}{\underbrace{n(n+1)}_{\leq (n+1)(n+1)}} \leq 0 \text{ donc}$$

$(T_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n - S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Les suites $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ sont donc adjacentes.

La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ (de même que $(T_n)_{n \geq 1}$) est donc convergente.

I.10 – Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

En mathématiques, on appelle suite récurrente linéaire d'ordre p toute suite à valeurs dans un corps commutatif comme $\mathbb{R}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ sont p scalaires fixés de K , a_0 non nul).

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 sont les suites géométriques.

Exemple 17 – Point de vue matriciel :

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ mais dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $U_n = A^n U_0$. Le problème semble alors terminé. Mais la réelle difficulté consiste alors à calculer A^n

Définition 7 – Suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

On appelle *récurrente linéaire d'ordre 2* toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{avec} \quad (a; b) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{I.1})$$

Remarque : Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a . Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.

Définition 8 – Équation caractéristique :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par (I.1).

On appelle *équation caractéristique* associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Remarque : L'hypothèse $b \neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

Théorème 22 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^N$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

T1 • Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

T2 • Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

T3 • (Hors-Programme) Si $\Delta < 0$ et $re^{\pm i\omega}$ sont les deux racines complexes et conjuguées de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n) \right) r^n.$$

 **Preuve :**

T1 • Supposons d'abord que l'équation admette deux solutions réelles $r_1 \neq r_2$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

On cherche $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant cette relation.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient
$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}.$$

Comme $r_1 \neq r_2$, ce système admet une unique solution

$$(\lambda; \mu) = \left(\frac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2}; \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \right).$$

Si λ et μ conviennent, alors leur valeur est donnée par la résolution de ce système et donc le couple $(\lambda; \mu)$ sera unique.

Synthèse : Montrons alors par une récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par définition de $(\lambda; \mu)$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b) = \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}. \end{aligned}$$

car $r_1^2 = a r_1 + b$ et $r_2^2 = a r_2 + b$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

T2 • Supposons maintenant que l'équation admette une solution double réelle $r \neq 0$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$. On cherche $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant cette relation.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient
$$\begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda r + \mu r = u_1 \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système est $r \neq 0$, donc il admet une unique solution

$$(\lambda; \mu) = \left(u_0; \frac{u_1 - r u_0}{r} \right).$$

S'il existe, le couple $(\lambda; \mu)$ sera unique.

Synthèse : Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

Par définition de $(\lambda; \mu)$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$ et $u_{n+1} = \lambda r^{n+1} + \mu(n+1)r^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r^{n+1} + \mu(n+1)r^{n+1}) + b(\lambda r^n + \mu n r^n) \\ &= \lambda r^n (ar + b) + \mu n r^n (ar + b) + \mu r^{n+1} a \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu(n+2)r^{n+2} \text{ car } r^2 = ar + b \text{ et } r = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

T3 • Le cas complexe $r_1 \neq r_2$ est hors-programme.



Exemple 18 – Suite de Fibonacci ^[3] :

Un exemple classique de suite classique, la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cette suite a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et dont les racines sont :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{1}{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire $F_n = \lambda \phi^n + \mu \psi^n$ puis, avec les conditions initiales qui imposent $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \psi^n).$$

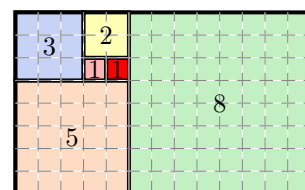
[3]. **FIBONACCI Leonardo**, italien, 1175 ?-1240 ?. De son vrai nom Léonard de Pise, dit Fibonacci (signifiant « fils de Bonaccio »), Leonardo est le fils d'un administrateur de la ville de Pise. Commerçant et grand voyageur, il parcourt l'Europe et les pays d'orient tout en s'imprégnant des mathématiques de son époque inspirées des mondes grecs, indiens et arabes.

Dans son *Liber Abaci* (Livre de calcul), publié en 1202, principalement consacré aux calculs commerciaux, il affine et résout des problèmes algébriques déjà rencontrés dans l'œuvre du mathématicien **Al Khwarizmi**.

Fibonacci fait grand usage des nombres dits « arabes » (système décimal positionnel), du calcul fractionnaire et de la méthode de résolution des équations, dite de fausse position. Il publiera aussi un traité de géométrie, *Practica geometriae* (1220), où il applique des méthodes algébriques à des problèmes géométriques, et un traité sur le calcul des racines carrées et cubiques (*Liber Quadratorum*, 1225).

Le *Liber Abaci* est aussi un recueil de « petits » problèmes comme celui, resté célèbre, de la reproduction des lapins :

Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?



On est ainsi conduit à la célèbre séquence des nombres de Fibonacci.

Méthode 10 – Plan d'étude des suites récurrentes linéaires :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique E_c .

M1 • On résout l'équation caractéristique. Le type des racines donne la forme explicite

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \quad \text{ou} \quad u_n = (\lambda n + \mu) r^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

M2 • À l'aide de u_0 et u_1 on détermine λ et μ en résolvant un système linéaire.

Remarque

u_0 et u_1 sont les conditions initiales de la suite comme pour les équations différentielles.

Exemple 19 :

Déterminons u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$.

$E_c : r^2 - 4r + 4 = 0$ a une solution double 2.

D'après le cours, il existe k_1 et k_2 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (k_1 n + k_2) 2^n.$$

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = -1 \\ (k_1 + k_2) \times 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}.$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n - 1) 2^n.$$

II. SÉRIES NUMÉRIQUES RÉELLES**Définition 9 – Suites des sommes partielles :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

D1 • On appelle *série de terme général* u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- ◇ u_n s'appelle le *terme général* de rang n .
- ◇ S_n s'appelle la *somme partielle* de rang n .

D2 • On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas,

- ◇ la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée *somme de la série* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

◇ On appelle *reste de rang n* l'élément R_n défini par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

D3 • Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

En particulier, deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Remarques et commentaires :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.
- La notation $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série. C'est un nombre (réel ou complexe) ^[4].
- Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S - S_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la $n^{\text{ème}}$ somme partielle.

- Les premiers termes d'une suite ne changent pas la nature de la série : $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Enfin, remarquez que $S_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$.

Le terme général définit la série et la réciproque est vraie : si l'on connaît la série, on peut donc retrouver son terme général.

Par exemple, si on sait que, $\forall n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n est définie par $S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$, alors $S_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

[4]. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, ...

⚠ Attention
Deux séries peuvent être de même nature sans avoir la même somme.

Exemple 20 – Série géométrique :

Les séries géométriques de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ où z est un nombre complexes sont convergentes si, et seulement si $|z| < 1$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|z| < 1} \frac{1}{1-z}.$$

De plus, lorsque $|z| < 1$, on a $R_n = \frac{z^{n+1}}{1-z}$.

Remarque : $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$. C'est, à une constante multiplicative près, le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue.

Exemple 21 – Série harmonique :

La série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.^a

^a. Son nom *harmonique* vient du fait qu'un terme est la moyenne harmonique des termes qui l'encadrent. Rappelons que la moyenne harmonique m_h de deux réels positifs a et b est définie par $\frac{2}{m_h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

$$\text{Ici, on a bien } 2 \left(\frac{1}{n} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{n-1} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{n+1} \right)^{-1}.$$

Les manières de montrer ce résultat sont nombreuses.

On a, par exemple,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la série convergeait vers un réel S , on aurait alors, par passage à la limite, $0 = S - S \geq \frac{1}{2}$ ce qui est impossible.

Donc H_n diverge mais on ne sait pas encore si elle a une limite. Patientez jusqu'à l'exemple (26) !

Exemple 22 – Série télescopique :

Les séries télescopiques de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{En effet, } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \dots - \cancel{\frac{1}{n}} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

D'une manière générale,

Proposition 23 – Série télescopique] :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Remarque : La simplification télescopique est l'analogue discret du théorème fondamental du calcul intégral.

En effet, la suite $\left(a_{n+1} - a_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1-n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est en quelque sorte la « dérivée » de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tout comme la fonction f' définie par une limite de taux d'accroissement est la dérivée de la fonction f .

Or, comment passe-t-on de f' à f ? On somme au sens du calcul intégral, tout comme on le fait avec les suites dans le cadre d'une simplification télescopique :

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_m.$$

Exemple 23 :

Étudions les séries de terme général $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ et $\ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$.

$$\text{— } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln(n+1) - \ln(n).$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$, de même nature que $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, est donc divergente (vers l'infini).

$$\begin{aligned}
 \text{--- } \forall n \geq 2, v_n &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{\frac{n}{n+1}}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
 \text{Comme } \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ la série } \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \text{ converge et on a :} \\
 \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln 2.
 \end{aligned}$$

Exemple 24 – Série exponentielle :

$\forall z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente et on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \mapsto \exp(zx)$ est clairement de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x \mapsto z^n \exp(zx)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0; 1]$ s'écrit :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0 \leq x \leq 1} |z^{n+1} \exp(zx)|.$$

En notant $z = a + ib$, on obtient $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leq \exp(|a|)$ pour $0 \leq x \leq 1$.

On en déduit :

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|a|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On conclut avec le théorème d'encadrement.

Proposition 24 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

 **Preuve :** La somme partielle associée à la série de terme général $\lambda u_n + v_n$ est $S_n = \sum_{k=0}^n (\lambda u_k + v_k)$.

La linéarité de la somme permet d'écrire :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k.$$

Or, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel.

Donc, la suite $\left(\lambda \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est également convergente *i.e.* la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge.

Il suffit alors d'utiliser la linéarité de l'application limite sur ce même espace :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lambda \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k \right) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v_k = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$



Corollaire 25 :

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

Pour le produit, c'est un peu plus compliqué et demande une notion de convergence un peu plus forte...

ATTENTION

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il est possible que $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ... L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Pire pour vous, même si $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, il est possible que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Il est donc INTERDIT de découper une somme de série en deux comme écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sans avoir vérifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient convergentes.

Retenez pour cela l'exemple (22) : La série $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ converge au contraire des deux séries $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}.$

II.1 – Condition nécessaire de convergence

Une première conséquence des théorèmes généraux, condition nécessaire de convergence qui sera le plus souvent un critère de divergence :

Proposition 26 :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Preuve : Il suffit de remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}.$

Par linéarité de la limite, si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente également et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = S - S = 0.$



⚠ Attention

La réciproque est fautive comme le montre la divergence de la série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ ou de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$

Le terme général d'une série convergente doit tendre vers 0.

Par la contraposée, s'il ne le fait pas alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série *diverge grossièrement*.

Exemples 25 – Séries grossièrement divergentes :

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leq 0$.
- Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum (-1)^n$ de l'exemple (??) diverge de même que les séries du type $\sum \sin(n)$.

II.2 – Séries à terme positif

Le **théorème (28)** du **paragraphe (??)** donnera une place toute particulière aux séries à terme positif par la condition suffisante de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Dans tout ce paragraphe, on considèrera des séries numériques réelles à terme positif (au moins à partir d'un certain rang) *a fortiori* réel.

Si les séries sont à terme négatif, en travaillant sur la série des opposés et en utilisant la linéarité de la somme, on obtient les mêmes résultats. Les théorèmes de ce paragraphe s'appliquent donc à toutes les séries à *terme de signe constant*.

Dans le cas des séries à terme positif, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est donc équivalent à trouver un majorant.

Théorème 27 :

T1 • Une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite

$\left(S_n = \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M.$$

T2 • Le seul cas de divergence est la limite infinie.

 **Preuve :** Comme $\sum u_n$ est une série à terme positif, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est une suite croissante.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de la limite monotone ... valable que dans $\mathbb{R}$ donc !



Exemple 26 :

La série harmonique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 27 – Série de Riemann convergente :

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

En effet, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n}$.

La suite des sommes partielles est donc majorée. Elle converge vers un réel inférieur à 2. ^[5]

II.3 – Condition suffisante de convergence**Définition 10 – Séries absolument convergentes :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Par linéarité de la somme et l'inégalité triangulaire, l'ensemble des séries absolument convergentes hérite aussi d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Théorème 28 – CA $\Rightarrow$ CV :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle converge, et on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Preuve :

1. On suppose dans un premier temps que la série est à terme réel.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\begin{cases} u_n^+ = \max(0, u_n) \\ u_n^- = \max(0, -u_n) \end{cases}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \\ 0 \leq u_n^- \leq |u_n| \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n = u_n^+ - u_n^- \\ |u_n| = u_n^+ + u_n^- \end{cases}$.

Comme $\sum |u_n|$ converge, les séries à terme positif $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont donc convergentes. Soient ℓ^+, ℓ^- leurs limites.

On a $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=0}^n u_k^+ - \sum_{k=0}^n u_k^- \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^+ - \ell^-$ i.e. la série $\sum u_n$ converge.

[5]. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

De plus, on a $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| = |\ell^+ - \ell^-| \leq |\ell^+| + |\ell^-| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

2. Si la suite est à terme complexe, on pose $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} |a_n| \leq |u_n| \\ |b_n| \leq |u_n| \end{cases}$. Par comparaison de séries à terme positif, les séries à terme réel

$\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes donc convergentes.

La stabilité de l'ensemble des suites convergente par combinaisons linéaires entraîne que la série $\sum u_n$ converge.

Comme $\forall N \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{n=0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=0}^N |u_n|$, par passage à la limite, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.



Exemple 28 :

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

En effet, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument. Elle converge.

INDEX

- Borne
 - supérieure, 22
- Combinaison
 - linéaire
 - de séries convergentes, 32
- Comportement
 - asymptotique, 9
- Condition
 - nécessaire, 33
 - suffisante, 35
- Critère
 - de divergence, 33
- Équation
 - caractéristique, 25
- Espace
 - vectériel, 16
- Humour, 1
- Limite
 - d'une suite, 13
 - d'une suite convergente, 9
 - d'une suite divergente, 10
 - et inégalités strictes, 14
 - Opérations sur les, 16
- Méthode
 - Étude d'un suite arithmético-géométrique, 6
 - Encadrer une suite, 7
 - Montrer qu'une suite est arithmétique, 4
 - Montrer qu'une suite est géométrique, 5
 - Montrer qu'une suite est monotone, 9
 - Montrer qu'une suite n'est pas majorée, 7
- Nature
 - d'une série, 29
- Opérateur
 - linéaire, 16
- Point
 - fixe, 6
- Raison
 - d'une suite arithmétique, 3
 - d'une suite géométrique, 3
- Raisonnement
 - par récurrence, 3
- Reste
 - d'une série, 29
- Somme
 - d'une série, 28
 - des termes d'une suite, 3
 - partielle, 28
- Suite, 2
 - adjacente, 23
 - arithmético-géométrique, 3
 - arithmétique, 3, 12
 - bornée, 7
 - convergente, 9
 - croissante, 8
 - divergente, 10
 - vers $\pm\infty$, 10
 - géométrique, 3, 6, 24
 - majorée, minorée, 7
 - monotone, 8
 - récurrence
 - linéaire d'ordre 2, 25
- Série
 - absolument convergente, 35
 - convergente, 28
 - divergente, 29
 - grossièrement, 34
 - exponentielle, 32
 - géométrique, 30
 - harmonique, 30
 - télescopique, 31
 - à terme positif, 34
- Terme général
 - d'une série, 28
- Théorème
 - d'encadrement, 20, 32
 - de la limite monotone, 22, 34