

## DM 3

## Étude de fonction, suite réelle, fonction définie par une intégrale

Les parties I et II sont indépendantes.

## Partie I : Fonction et suite réelle

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\forall t \in ]0; +\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

## A : Étude d'une fonction d'une variable

1. a. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .  
b. Dresser le tableau des variations de  $f$  en précisant les limites en 0 et en  $+\infty$ .
2. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  vers  $[2; +\infty[$ .
3. On note  $g : [2; +\infty[ \rightarrow [1; +\infty[$  la bijection réciproque de la restriction de  $f$  à  $[1; +\infty[$ .
  - a. Dresser le tableau de variations de  $g$ .
  - b. Justifier que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]2; +\infty[$ .
  - c. Soit  $y \in [2; +\infty[$ . En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation  $f(t) = y$  d'inconnue  $t \in ]0; +\infty[$ .  
En déduire une expression de  $g(y)$  en fonction de  $y$ .

## B : Étude d'une suite

On introduit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

4. Montrer, que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \geq 1$ .
5. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , elle renvoie la valeur de  $u_n$ .

```

1  def suite(n):
2      u = 1
3      for k ...:
4          u = ...
5      return ...

```

6. On pose, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .
  - a. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$ .

- b. Majorer les sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$  en fonction d'une somme d'une série usuelle.

En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$ .

- c. Calculer, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$  par télescopage.

En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un réel  $\ell$ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

7. a. Soit un entier  $k$  supérieur ou égal à 2.

Montrer, après avoir minoré la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  sur  $[k-1; k]$ , que on a :  $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$ .

- b. Pour tous entiers  $n$  et  $p$  tels que  $2 \leq p < n$ , calculer  $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$  et en déduire :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

- c. En déduire, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3 :  $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$ .

Montrer alors que  $\ell$  appartient à l'intervalle  $[2; 3]$ .

- d. Montrer, pour tout entier  $p$  supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

- e. Compléter cette fonction **Python** qui renvoie une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-4}$  près :

```

1  def approx():
2      u = ....
3      p = 2
4      while .... 0.0001:
5          u = ....
6          p = ....
7      return ...

```

## Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans toute cette partie,  $h$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad h(x) = x - \ln(x).$$

8. Dresser le tableau de variations de  $h$  en précisant ses limites en 0 et en  $+\infty$ . On note  $\Phi$  la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{h(t)} dt.$$

9. Montrer que  $\Phi$  est bien définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

10. a. Montrer que  $\Phi'(x)$  a le signe du numérateur en s'appuyant sur le signe de  $h(x)$  et  $h(2x)$ .  
 b. En déduire les variations de  $\Phi$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

11. a. Justifier l'encadrement :  $0 \leq \frac{1}{h(t)} \leq 1$  pour tout  $t > 0$ .  
 b. Montrer :  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, 0 \leq \Phi(x) \leq x$ .

12. a. Montrer que  $\Phi$  est prolongeable par continuité en 0.

On note encore  $\Phi$  la fonction ainsi prolongée. Préciser alors  $\Phi(0)$ .

- b. Montrer :  $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = 0$ . (On pensera à simplifier par  $\ln(x)$ )

13. On admet que la fonction  $\Phi$  est alors dérivable en 0 et que  $\Phi'(0) = 0$ .

On donne  $\Phi(2) \approx 1,1$  et on admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$ .

Tracer, en annexe, l'allure de la courbe représentative de  $\Phi$  ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.