

DM 3

Étude de fonction, suite réelle, fonction définie par une intégrale

Partie I : Fonction et suite réelle

A : Étude d'une fonction d'une variable

1. a. La fonction
- f
- est dérivable sur
- $]0; +\infty[$
- et

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}.$$

Comme $t^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$, le signe de $f'(t)$ est celui de $t^2 - 1$.

$$0 < t < 1 \Rightarrow f'(t) < 0,$$

$$t = 1 \Rightarrow f'(1) = 0,$$

$$t > 1 \Rightarrow f'(t) > 0.$$

La fonction est donc décroissante sur $]0; 1[$ puis croissante sur $]1; +\infty[$.

- b. Les limites sont

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty.$$

De plus,

$$f(1) = 2.$$

On obtient le tableau de variations suivant.

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		0	
$f(t)$	$+\infty$	2	$+\infty$

La fonction admet donc un minimum égal à 2, atteint pour $t = 1$.

2. La fonction
- f
- est continue sur
- $[1; +\infty[$
- et strictement croissante sur cet intervalle puisque

$$\forall t > 1, \quad f'(t) > 0.$$

De plus,

$$f(1) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty.$$

Par le théorème de la bijection, la restriction de f à $[1; +\infty[$ réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $[2; +\infty[$.

3. On note

$$g : [2; +\infty[\longrightarrow [1; +\infty[$$

la bijection réciproque de cette restriction.

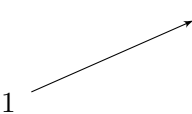
a. La fonction réciproque d'une fonction strictement croissante est strictement croissante.

Comme

$$g(2) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = +\infty,$$

on obtient le tableau de variations.

y	2	$+\infty$
$g(y)$	1	$+\infty$



b. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ et

$$\forall t > 1, \quad f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0.$$

La dérivée ne s'annule jamais sur $]1; +\infty[$.

Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, g est dérivable sur $]2; +\infty[$.

En outre,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{1 - \frac{1}{g(y)^2}} = \frac{g(y)^2}{g(y)^2 - 1} > 0.$$

c. Soit $y \in [2; +\infty[$. Résolvons

$$f(t) = y.$$

On écrit

$$t + \frac{1}{t} = y.$$

Comme $t > 0$,

$$t^2 - yt + 1 = 0.$$

Le discriminant est

$$\Delta = y^2 - 4 \geq 0.$$

Les solutions sont

$$t = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Le produit des racines vaut 1 ; ainsi

$$\frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \leq 1, \quad \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \geq 1.$$

La seule solution appartenant à $[1; +\infty[$ est donc

$$g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

On peut vérifier que

$$g(2) = 1.$$

B : Étude d'une suite

4. Montrons par récurrence que la suite est bien définie et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq 1.$$

Initialisation :

Par définition,

$$u_1 = 1 \geq 1.$$

Hérédité :

Soit $n \geq 1$ tel que $u_n \geq 1$.

Alors $u_n > 0$ et

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n}.$$

Le second terme étant strictement positif,

$$u_{n+1} \geq u_n \geq 1.$$

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion :

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq 1.}$$

La suite est donc bien définie.

5. La boucle doit effectuer les calculs de $u_2, u_3, \dots, u_n$.

```

1  def suite(n):
2      u = 1
3      for k in range(1,n):
4          u = u + 1/(k**2*u)
5      return u

```

6. On pose

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

a. D'après la définition,

$$v_n = \frac{1}{n^2 u_n}.$$

Comme $u_n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{u_n} \leq 1.$$

Donc

$$\boxed{0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

b. Pour tout $N \geq 1$,

$$0 \leq \sum_{n=1}^N v_n \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

est convergente.

Par comparaison,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} v_n \text{ converge.}}$$

7. Pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

La somme est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = u_n - u_1 = u_n - 1.$$

Comme la série $\sum v_n$ converge, la suite de ses sommes partielles converge.

Ainsi,

$$u_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$

converge.

Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.}$$

On ne cherche pas à déterminer cette limite.

8. a. Soit $k \geq 2$.

La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $t \in [k-1, k]$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

En intégrant sur $[k-1, k]$,

$$\boxed{\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.}$$

b. Soient $2 \leq p < n$.

Par télescopage,

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = u_n - u_p.$$

Comme

$$v_k \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt,$$

on obtient

$$u_n - u_p \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

Les intervalles étant consécutifs,

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

c. Prenons $p = 2$.

Pour tout $n \geq 3$,

$$0 \leq u_n - u_2 \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

Or

$$\int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{n-1} = 1 - \frac{1}{n-1} \leq 1.$$

Ainsi

$$u_2 \leq u_n \leq u_2 + 1.$$

Comme

$$u_2 = 1 + \frac{1}{1^2} = 2,$$

on en déduit

$$2 \leq u_n \leq 3.$$

En passant à la limite,

$$\ell \in [2, 3].$$

d. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt,$$

on obtient

$$0 \leq \ell - u_p \leq \int_{p-1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt.$$

Enfin,

$$\int_{p-1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{p-1}^{+\infty} = \frac{1}{p-1}.$$

Ainsi

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

e. Pour garantir une erreur inférieure à 10^{-4} , il suffit d'avoir

$$\frac{1}{p-1} \leq 10^{-4}.$$

La fonction Python devient :

```

1  def approx():
2      u = 2
3      p = 2
4      while 1/(p-1) > 0.0001:
5          u = u + 1/(p**2*u)
6          p = p + 1
7      return u

```

La valeur renvoyée est une approximation de ℓ à 10^{-4} près.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

9. Pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} h'(x) < 0 & \text{si } 0 < x < 1, \\ h'(1) = 0, \\ h'(x) > 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(x)) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x)) = +\infty.$$

Enfin,

$$h(1) = 1.$$

On obtient donc :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
h	$+\infty$	1	$+\infty$

Ainsi,

$$h(x) \geq 1 > 0 \quad \text{pour tout } x > 0.$$

10. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{h(t)}$ est continue sur $[x, 2x]$ puisque $h(t) > 0$. L'intégrale définissant $\Phi(x)$ existe donc.

La fonction

$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{h(t)} dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, d'après la formule de dérivation d'une intégrale à bornes variables,

$$\Phi'(x) = \frac{2}{h(2x)} - \frac{1}{h(x)}.$$

Or

$$h(x) = x - \ln(x)$$

et

$$h(2x) = 2x - \ln(2x).$$

Ainsi,

$$\Phi'(x) = \frac{2(x - \ln x) - (2x - \ln(2x))}{(x - \ln x)(2x - \ln(2x))}.$$

Comme

$$\ln(2x) = \ln 2 + \ln x,$$

on obtient

$$\Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

11. a. D'après la première question,

$$h(x) > 0 \quad \text{et} \quad h(2x) > 0$$

pour tout $x > 0$.

Par conséquent,

$$(x - \ln x)(2x - \ln(2x)) > 0.$$

Le dénominateur de $\Phi'(x)$ est donc strictement positif. Ainsi,

$$\text{sgn}(\Phi'(x)) = \text{sgn}(\ln 2 - \ln x).$$

Or

$$\ln 2 - \ln x = \ln\left(\frac{2}{x}\right),$$

d'où

$$\begin{cases} \Phi'(x) > 0 & \text{si } 0 < x < 2, \\ \Phi'(2) = 0, \\ \Phi'(x) < 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

b. On en déduit que Φ est strictement croissante sur $]0, 2[$ puis strictement décroissante sur $]2, +\infty[$.

Ainsi, Φ admet un maximum en $x = 2$.

x	0	2	$+\infty$
$\Phi'(x)$		0	—
Φ	$\Phi(0)$	$\Phi(2)$	$\ln(2)$

12. a. D'après la première question,

$$h(t) \geq 1$$

pour tout $t > 0$. Comme $h(t) > 0$, on a

$$0 < \frac{1}{h(t)} \leq 1.$$

Ainsi,

$$0 \leq \frac{1}{h(t)} \leq 1 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

b. Pour tout $x > 0$,

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{h(t)} dt.$$

Comme

$$0 \leq \frac{1}{h(t)} \leq 1,$$

on obtient

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{1}{h(t)} dt \leq \int_x^{2x} 1 dt.$$

Donc

$$0 \leq \Phi(x) \leq 2x - x,$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \Phi(x) \leq x.$$

13. a. Pour tout $x > 0$,

$$0 \leq \Phi(x) \leq x.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = 0.$$

Ainsi, Φ est prolongeable par continuité en 0 en posant

$$\Phi(0) = 0.$$

b. Pour $x > 0$,

$$\Phi'(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{(x - \ln x)(2x - \ln(2x))}.$$

On simplifie l'expression en divisant numérateur et dénominateur par $\ln(x)^2$.

Comme

$$x - \ln x = -\ln x \left(1 - \frac{x}{\ln x}\right)$$

et

$$2x - \ln(2x) = -\ln x \left(1 - \frac{2x + \ln 2}{\ln x}\right),$$

on obtient

$$\Phi'(x) = \frac{\frac{\ln 2}{\ln x} - 1}{\ln x \left(1 - \frac{x}{\ln x}\right) \left(1 - \frac{2x + \ln 2}{\ln x}\right)}.$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{\substack{u = \frac{1}{x} \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{1}{-u \ln u} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \ln 2}{\ln x} = 0,$$

tandis que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2}{\ln x} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi'(x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi'(x) = 0.$$

14. D'après l'énoncé, Φ est dérivable en 0 et

$$\Phi'(0) = 0.$$

On sait également que

$$\Phi(2) \approx 1,1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln 2 \approx 0,7.$$

La courbe passe donc par l'origine $O(0, 0)$, monte jusqu'au maximum

$$(2; \Phi(2)) \approx (2; 1,1),$$

puis décroît et se rapproche de l'asymptote horizontale

$$y = \ln 2 \approx 0,7.$$

La tangente en 0 est donnée par

$$y = \Phi(0) + \Phi'(0)x,$$

soit

$$y = 0.$$

