

On s'intéresse dans cette partie à des suites définies par des relations de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{où } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction donnée.}$$

I. ÉTUDE GUIDÉE DES SUITES RÉCURRENTES

I.1 – Cas où f est croissante

Exercice 1

On considère la fonction f définie, pour tout réel $x \in [0, +\infty[$, par $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ et on considère la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. a. Étudier les variations de f et montrer que l'intervalle $[0; 1]$ est stable.
b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0; 1]$.
2. a. Montrer que $\forall x \geq 0, f(x) \leq x$.

Remarque : Dire que pour tout $x \in I, f(x) \leq x$, c'est dire que la courbe représentative de la fonction f est au dessous de la droite d'équation $y = x$.

- b. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
4. a. Déterminer les points fixes de f .
b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0; 1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f .
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
5. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

I.2 – Cas où f est décroissante

Ce cas est plus compliqué et à la limite du programme. L'idée centrale est que la fonction $f \circ f$ est alors croissante et qu'on peut donc utiliser les résultats précédents avec les sous-suites des termes pairs et impairs $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 - u_n)^2 \end{cases}$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (1 - x)^2$.

1.
 - a. Étudier les variations de la fonction f .
 - b. Vérifier que l'intervalle $[0; 1]$ est stable par f .
 - c. Déterminer les points fixes de la fonction f .
 - d. Préciser le sens de variations de la fonction $g = f \circ f$ sur $[0; 1]$.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
3.
 - a. Démontrer que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont à valeurs dans $[0; 1]$.
 - b. Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones. Préciser leur monotonie.
 - c. Justifier que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

On note respectivement ℓ_1 et ℓ_2 les limites des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

 - d. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
 - e. Déterminer ℓ_1 et ℓ_2 .

À retenir – Résumé du plan d'étude :

1. On démontre d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ (où I est un intervalle stable).
2. On démontre ensuite que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (ou décroissante).
3. Si I est un intervalle borné *i.e.* si I a des extrémités finies, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (par théorème de convergence monotone) de limite finie ℓ .

On obtient de plus que $\ell \in \bar{I}$, adhérence de l'intervalle I (intervalle auquel on a ajouté ses bornes finies).

Par exemple, si $I =]0; 2[$, on obtient que : $\ell \in [0; 2]$.

4. Enfin, on démontre que ℓ est un point fixe de f .

Ainsi, s'il n'y a qu'un point fixe de f dans $\bar{I}$ (c'est le cas le plus simple), c'est forcément la valeur de ℓ cherchée.

Exercice 5 – (Utilisation de l'inégalité des accroissements finis)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

et on note $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que $\forall x \in [0; 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3. Déterminer les points fixes de f sur $[0; 2]$. Notons α l'unique point fixe de f dans $[0; 2]$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
6. Enfin, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
7. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
8. Déterminer un entier N tel que $|u_N - \alpha| \leq 10^{-5}$.
9. Compléter le script **Python** suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

```

1 import numpy as np
2 N = int(np.ceil(5 * np.log(10) / np.log(2) + 1))
3 u = 0
4 for k in range(N) :
5     u = np.sqrt(u+1)
6 print(u)

```

Exercice 6

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0; 1]$, que l'on notera α .
2. Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f . En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$.
3. a. Montrer : $\forall x \in [0; 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.
b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \alpha|$.
c. Puis : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$.
d. En déduire enfin que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Écrire un programme **Python** donnant une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Exercice 7

Soit $f : x \mapsto x^2 + \frac{3}{16}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Calculer u_1 .
2. Déterminer les limites possibles de la suite.
3. Démontrer que $f\left(\left[0, \frac{7}{16}\right]\right) \subset \left[0, \frac{7}{16}\right]$.

4. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in \left[0, \frac{7}{16}\right]$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_{n+1} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{7}{8} \left|u_n - \frac{1}{4}\right|$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \frac{7}{16}$.
7. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 8 – ((d'après EML 2001))

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ sur $]0, +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (xe^x - 2e^x + x + 2)$.
3. Étudier les variations de la fonction $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par : $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$. En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f''(x) > 0$.
4. En déduire le sens de variation de f (on admettra que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}$). On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f .
5. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq f(x) \leq 1$.
6. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.
7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln(2)|$.
8. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln(2)|$.
9. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 9 – (Suite récurrente d'ordre 1)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$, définie sur $[-1; +\infty[$ ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0; 2]$ est stable par f .
2. Justifier que si un réel x est point fixe de f , alors nécessairement $x \geq 0$.
3. Démontrer que f possède un unique point fixe et le déterminer. On notera r ce point fixe.

Vérifier que $r \in [0; 2]$.

4. a. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et bornée par 0 et r .
- b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire ?
- c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{2} |u_n - r|$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

- d. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi qu'un entier N tel que $|u_N - r| \leq 10^{-9}$.

II. CONCOURS

Exercice 10 – (Théorème de convergence monotone / d'encadrement (d'après EDHEC 2001))

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2 .
4. En déduire que, pour tout $n > 0$, on a :

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}.$$

5. En déduire que, pour tout $n \neq 0$, $u_n^2 \geq 2n + 1$.
6. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier n et qui affiche la valeur de u_n .
8. Écrire un script **Python** qui affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geq 100$.

Exercice 11 – (d'après EML 2016)

On considère l'application $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. (on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)
6. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.