



## DS 1

## Espaces vectoriels et Séries

19/09/2026

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

---

**L'usage de calculatrices est interdit.**

### AVERTISSEMENT

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*

*Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.*

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants.

## Exercice 1 – (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et on considère  $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

1.
  - a. Calculer  $(A + I)^2$ .
  - b. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .
2. On note  $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$ .
  - a. Résoudre l'équation  $AX = -X$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .
  - b. En déduire que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et déterminer une base de  $F$ .

3. On note  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

- a. Démontrer que  $P$  est inversible et déterminer son inverse.
  - b. Montrer que  $P^{-1}AP = T$  où  $T$  est la matrice triangulaire supérieure  $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
  - c. Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$ .
- a. Exhiber une matrice  $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $T$  s'écrit  $T = -I + N$ .
  - b. Calculer  $N^2$  et en déduire  $N^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
  - c. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $T^n$  à l'aide de la formule du binôme de Newton.  
Le résultat devra faire apparaître  $T^n$  comme combinaison linéaire de  $I$  et de  $N$ .
  - d. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer enfin  $T^n$  comme combinaison linéaire de  $I$  et de  $T$ .
- a. Expliquer pourquoi l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (-1)^{n+1}((n-1)I + nA)$ .
  - b. Vérifier que la formule trouvée à la question 5.a) reste valable pour  $n = -1$ .

## Exercice 2

1. Quelle est la nature des séries  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$  et  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$  ?
2. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier  $n$  et renvoie  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$ , somme partielle d'ordre  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ .

3. On note  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k & v_n &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \\ &= a_0 - a_1 + \dots - a_{2n-1} + a_{2n} & &= a_0 - a_1 + \dots + a_{2n} - a_{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } s_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \\ &= a_0 - a_1 + \dots - a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

- a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante, et que la suite  $(v_n)$  est croissante.  
b. Montrer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$ .

En déduire que la suite  $(u_n)$  admet une limite  $s$  et que la suite  $(v_n)$  admet la même limite  $s$ .

- c. En déduire que la suite  $(s_n)$  converge vers  $s$ .

4. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$  est convergente.

5. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$  est convergente. On note  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$  sa somme.

6. a. Établir, pour tout réel  $t$  positif et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

- b. En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

- c. Démontrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

- d. En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ .

### Exercice 3

On note  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### ÉTUDE DE FONCTION

1.
  - a. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ , et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .

On admettra pour la suite que  $f'(0) = -\frac{1}{2}$  et que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

2.
  - a. Étudier les variations de l'application  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :

$$u : x \mapsto (1 - x)e^x - 1.$$

- b. Montrer :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ .
  - c. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
  - d. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
  - e. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .

### ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTÉ ASSOCIÉE À LA FONCTION $f$

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$ .

3. Montrer que  $f$  admet un point fixe et un seul, noté  $\alpha$ , que l'on calculera.

4.
  - a. Établir :  $\forall x \in [0; +\infty[, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$ .
  - b. Montrer :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$ .
  - c. Montrer :  $\forall x \in [0; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$ .
  - d. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ .

5. En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$ .

6. Conclure que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$ .

8. Si on ne connaissait pas la valeur de  $\alpha$ , comment aurait-on pu déterminer un entier  $n$  tel que  $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$  ? Écrire l'appel correspondant en **Python**.