

DS 1

Espaces vectoriels et Séries

Exercice 1 – (inspiré de EDHEC 2016)

1. Tout d'abord :

$$A + I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (A + I)^2 &= \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

D'après la question précédente : $(A + I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Or :

$$(A + I)^2 = A^2 + 2A + I \quad \begin{array}{l} \text{(car les matrices } A \\ \text{et } I \text{ commutent)} \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A^2 + 2A + I &= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc } A^2 + 2A &= -I \\ \text{et } A(A + 2I) &= -I \\ \text{ainsi } A(-(A + 2I)) &= I \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $-(A + 2I)$.

$$A^{-1} = -A - 2I$$

a. a. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a alors :

$$\begin{aligned} AX = -X &\Leftrightarrow (A + I)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + y. \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = -2x + y \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x + y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
 &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 F &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

b. D'après la question précédente : $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre F ,
- est libre car est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de F .

3. a. On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1\}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{L_3 \leftarrow L_3 - L_2\}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P .

On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Finalement : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Tout d'abord, on a :

$$AP = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$$

Ainsi : $P^{-1}AP = T$.

c. Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : P^{-1}A^nP = T^n$.

Initialisation : D'une part : $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.

D'autre part : $T^0 = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n \\ &= P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP && \text{d'après la question précédente} \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A^nP \\ &= P^{-1}AIA^nP = P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Synthèse : Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$.

4. a. D'après l'énoncé,

$$N = T + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b. Tout d'abord : } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

En conclusion : $N^0 = I, N^1 = N$ et pour tout $k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

- c. Les matrices $(-I)$ et N commutent car la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
 T^n &= (-I + N)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-I)^{n-k} N^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} I^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} I N^k \quad (\text{car } \forall j \in \mathbb{N}, I^j = I) \\
 &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k \\
 &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k \\
 &= \binom{n}{0} (-1)^n N^0 + \binom{n}{1} (-1)^{n-1} N^1 \\
 &= (-1)^n I + n(-1)^{n-1} N \\
 &= (-1)^n (I + (-1)^{-1} n N) = (-1)^n (I - nN)
 \end{aligned}$$

Enfin : $(-1)^0 (I - 0 \cdot N) = I$ et $T^0 = I$.

La formule précédente reste valable pour $n = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = (-1)^n (I - nN)$.

- d. Comme $N = T + I$, on obtient :

$$(-1)^n (I - nN) = (-1)^n (I - n(T + I)) = (-1)^n ((1 - n)I - nT) = (-1)^n (-(n - 1)I - nT).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = (-1)^{n+1} ((n - 1)I + nT)$.

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, $T^n = (-1)^{n+1} ((n - 1)I + nT)$.

Or : $A^n = P T^n P^{-1}$. En combinant ces deux informations, on obtient :

$$\begin{aligned}
 A^n &= P T^n P^{-1} = P ((-1)^{n+1} ((n - 1)I + nT)) P^{-1} \\
 &= (-1)^{n+1} ((n - 1)P P^{-1} + nP T P^{-1}).
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (-1)^{n+1} ((n - 1)I + nA)$.

- b. Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (-1)^{n+1} ((n - 1)I + nA) &= (-1)^{-1+1} ((-1 - 1)I + (-1)A) \\
 &= (-2I - A) = -A - 2I
 \end{aligned}$$

Ainsi, la formule trouvée à la question 5.a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

1. Tout d'abord :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} \geq 0$.
- $\frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
- La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant $1 (1 > 1)$. Elle est donc divergente.

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.

Ensuite :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$.
- $\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
- La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 (2 > 1)$. Elle est donc convergente.

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

2.

```

1  def somme(n) :
2      S = 0
3      for k in range(n+1) :
4          S = S + 1 / (k+1)**2
5      return S

```

Détaillons les éléments de ce programme.

Début du programme : Conformément à l'énoncé, on commence par préciser la structure de la fonction :

- cette fonction se nomme somme,
- elle prend en paramètre la variable n,
- elle admet pour variable de sortie la variable S.

On initialise ensuite la variable S à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

Structure itérative : Les lignes 3 à 4 consistent à mettre à jour la variable S pour qu'elle contienne la quantité $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$.

Pour cela, on utilise une structure conditionnelle (boucle for) :

Fin du programme : À l'issue de cette boucle, la variable S contient la quantité $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$.

Commentaire : Il est aussi possible de proposer une fonction tirant parti des fonctionnalités de Python :

```

1  def somme(n) :
2      S = [ 1/(k+1)**2 for k in range(n+1) ]
3      S = sum(S)
4      return S

```

3. a. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} \right) - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\
 &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \quad (\text{car } 2n+1 \text{ impair et } 2n+2 \text{ pair})
 \end{aligned}$$

Comme la suite (a_n) est décroissante, alors : $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$, et donc : $a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante.

De même :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\ &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+3} a_{2n+3} \right) - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \quad (\text{car } 2n+2 \text{ pair et } 2n+3 \text{ impair}) \end{aligned}$$

Comme la suite (a_n) est décroissante, alors : $a_{2n+2} \geq a_{2n+3}$, et donc : $a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \geq v_n$. La suite (v_n) est croissante.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord : $v_n - u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$

$$= (-1)^{2n+1} a_{2n+1}$$

$$= -a_{2n+1} \leq 0 \quad (\text{car } (a_n) \text{ est une suite})$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$.

- La suite (v_n) étant croissante, on en déduit :

$$\forall n \geq 0, v_n \geq v_0$$

On en déduit, par transitivité : $\forall n \in \mathbb{N}, v_0 \leq v_n \leq u_n$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par v_0 . Elle converge donc vers une limite ℓ_1 .

- On raisonne de manière similaire pour (v_n) .

La suite (u_n) étant décroissante, on en déduit : $\forall n \geq 0, u_n \leq u_0$.

Puis, par transitivité : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq u_0$.

La suite (v_n) est croissante et majorée par u_0 . Elle converge donc vers une limite ℓ_2 .

- i. Il reste à démontrer : $\ell_1 = \ell_2$. Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_2 - \ell_1$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -a_{2n+1} = 0$$

Ainsi, on a bien : $\ell_1 = \ell_2$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc convergentes vers la même limite que l'on note s .

- c. On remarque tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = s_{2n} \quad \text{et} \quad v_n = s_{2n+1}$$

Soit I un intervalle ouvert contenant s .

- Comme $s_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_{2n}) (i.e. tous les termes d'indices pairs de la suite (s_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

- Comme $s_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_{2n+1}) (i.e. tous les termes d'indices impairs de la suite (s_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_n) sauf un nombre fini d'entre eux.

Ceci signifie que la suite (s_n) est convergente de limite s .

4. D'après la question 3.c), la suite (s_n) des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n a_n$ converge, donc la série converge.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \frac{1}{n+1}$.

La suite (a_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

D'après la question 4, la série $\sum (-1)^n a_n$ (autrement dit la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$) est convergente.

6. a. Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-t$.

Comme $-t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre l'égalité précédente entre 0 et 1.

- D'une part, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

- D'autre part, toujours par linéarité :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

De plus :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(|1+t|)]_0^1 = \ln(|2|) - \ln(|1|) = \ln(2)$$

$$\text{Finalement : } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

- c. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

- Par inégalité triangulaire, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant :

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{t^n}{1+t} \right| dt$$

- Or : $\left| \frac{t^n}{1+t} \right| = \frac{|t^n|}{|t+1|} = \frac{|t|^n}{|t+1|} = \frac{t^n}{t+1}$ car $t > 0$ et $t+1 > 0$.

- De plus, comme $t > 0$, $1+t > 1$, $\frac{1}{t+1} < 1$ et $\frac{t^n}{1+t} < t^n$.

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt < \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Par transitivité, on obtient bien : $\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question 6.c) :

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| = |(-1)^n| \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit :

$$-\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$$

- Or :

$$\begin{aligned} & \times -\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ & \times \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit : $(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Tous les objets considérés admettant une limite, on en déduit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2) - \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \ln(2)$$

Exercice 3

ÉTUDE DE FONCTION

1. a. — La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :
 - ◇ $f_1 : x \mapsto x$ est continue sur $]0, +\infty[$ car polynomiale.
 - ◇ $f_2 : x \mapsto e^x - 1$ est continue sur $]0, +\infty[$, NE S'ANNULE PAS sur $]0, +\infty[$.

— Par un raisonnement analogue, la fonction f est continue sur $] -\infty, 0[$.

On en conclut que f est continue sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

— De plus, la fonction f est continue en 0. En effet :

— d'une part :

$$\frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$$

— d'autre part : $f(0) = 1$.

Ainsi, on obtient bien : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

On en conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- b. Par un raisonnement similaire à celui de la question précédente (on remplace « continue » par « de classe $\mathcal{C}^1$ »), on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Soit $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

2. a. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = -xe^x.$$

Comme $e^x > 0$, $u'(x)$ est du signe de $-x$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	-1	0	$-\infty$

Détaillons les éléments de ce tableau.

◇ Tout d'abord : $u(0) = (1 - 0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

◇ Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) = (1 - x)e^x - 1 = e^x - xe^x - 1.$$

Or, par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

D'où, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -1$.

◇ Enfin : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty$.

- b. ◇ Remarquons tout d'abord : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x - 1)^2}$.

◇ D'après la question précédente, la fonction u est croissante sur $] -\infty, 0]$ et décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc un maximum en 0. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) \leq u(0) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 0$$

◇ Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x - 1)^2} < 0.$$

En effet : $(e^x - 1)^2 > 0$ et $u(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

◇ Enfin, $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0$ d'après l'énoncé.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.

c. ◇ Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$.

De plus : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

◇ Ensuite :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{e^x}.$$

Or, par croissances comparées : $\frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

◇ Avec la question 2.b), on obtient le tableau de variations suivant :

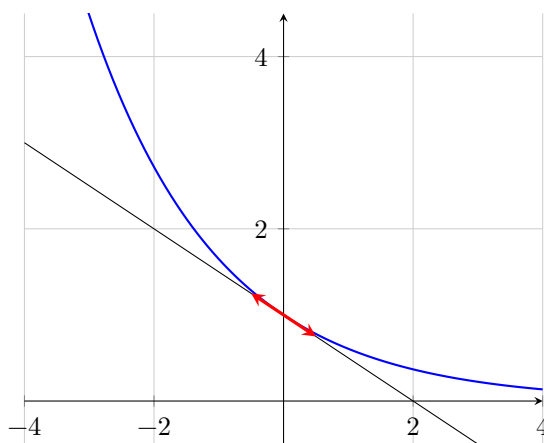
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—		
f	$+\infty$	1	0

d. Tout d'abord, déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

Il s'agit de la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f(0) + f'(0)(x - 0) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

On obtient le graphe suivant :



ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTÉ ASSOCIÉE À LA FONCTION f

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

◇ Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} &= x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{e^x - 1} &= 1 \quad (\text{car } x \neq 0) \\ \Leftrightarrow e^x - 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow e^x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \ln(2) \end{aligned}$$

◇ Si $x = 0$, alors : $f(0) = 1$.

On en déduit que 0 n'est pas un point fixe de f .

La fonction f admet pour unique point fixe $\alpha = \ln(2)$.

4. a. Considérons la fonction $g : x \mapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2e^x(e^x - 1 - x)$$

Déterminons le signe de $g'(x)$.

- ◇ Comme $e^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1 - x$.
- ◇ Or la fonction $h : x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ se situe au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0.

Or, cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= h(0) + h'(0)(x - 0) \\ &= e^0 + e^0 x = 1 + x \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$. D'où :

$$e^x - 1 - x \geq 0$$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geq 0$.

La fonction g est donc croissante. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) \geq g(0) = 0$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

b. Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2(1-x)e^x - 2 + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2e^x - 2xe^x - 2 + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \\ \forall x \in]0, +\infty[\quad &\left[f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \right. \end{aligned}$$

c. Soit $x \in [0, +\infty[$.

◇ Tout d'abord, d'après la question 2. a) :

$$f'(x) < 0.$$

◇ Démontrons : $-\frac{1}{2} \leq f'(x)$. Deux cas se présentent :

× si $x \neq 0$, alors, d'après la question précédente :

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$$

Comme $2(e^x - 1)^2 > 0$, on en déduit que $f'(x) + \frac{1}{2}$ est du signe de $g(x)$.

Or, d'après la question 2. a) : $g(x) \geq 0$. On en déduit :

$$f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0.$$

× si $x = 0$, alors :

$$f'(0) = -\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}.$$

Finalement : $\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) \geq -\frac{1}{2}$.

On en déduit : $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

d. D'après les questions précédentes :

◇ f est dérivable sur $[0, +\infty[$,

◇ $\forall x \in [0, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

En effet, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0 \\ \text{donc} & \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \\ \text{c'est-à-dire} & \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|y - x|$$

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite appliquer cette inégalité à $y = u_n$ et $x = \alpha$.

Pour cela, vérifions que ces deux termes appartiennent à l'intervalle $[0, +\infty[$.

D'après le tableau de variations de la question 2.c), $[0, +\infty[$ est un intervalle stable de f . De plus : $u_0 = 1 \geq 0$.

Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, +\infty[$.

D'après la question 3. : $\alpha = \ln(2) \in [0, +\infty[$.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$.

En appliquant donc l'inégalité précédente à $y = u_n \in [0, +\infty[$ et $x = \alpha \in [0, +\infty[$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

◇ Or :

- $f(u_n) = u_{n+1}$, par définition de la suite (u_n) ,
- $f(\alpha) = \alpha$, car α est un point fixe de f .

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

5. Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$.

Initialisation : a. D'une part, d'après la question 3. : $\frac{1}{2^0} (1 - \alpha) = 1 - \ln(2)$.

b. D'autre part, comme $u_0 = 1$:

$$|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = |1 - \ln(2)| = 1 - \ln(2)$$

En effet : $1 - \ln(2) \geq 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} (1 - \alpha)$).

D'après la question 2.d) :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Or, par hypothèse de récurrence :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$$

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} (1 - \alpha) = \frac{1}{2^{n+1}} (1 - \alpha)$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Synthèse : Par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha).$$

6. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$$

Or :

$$\begin{aligned} & \rightarrow -\frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \rightarrow 0 \text{ car } \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } 2^{n+1} \rightarrow +\infty \\ & \rightarrow \frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $|u_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ceci équivaut à : $u_n - \alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite α .

7.

```

1  n = 0
2  u = 1
3  while abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9) :
4      u = u / (np.exp(u) - 1)
5      n = n + 1
6  print(n)

```

Détaillons les éléments de ce programme.

Début du programme : La variable n est initialisée à 0.

La variable u , qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) , est initialisée à $u_0 = 1$.

Structure itérative : Les lignes 3 à 5 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

On doit donc calculer les valeurs successives de la suite (u_n) jusqu'à ce que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Autrement dit, on doit calculer ces valeurs successives tant que $|u_n - \alpha| \geq 10^{-9}$.

Pour cela, on met en place une structure itérative **while** :

Tant que $|u_n - \alpha| \geq 10^{-9}$, on calcule u_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans la variable u :

On met alors à jour en conséquence la variable n : on ajoute 1 pour signaler qu'on a calculé u_{n+1} .

Fin du programme : À l'issue de cette boucle, la variable n contient le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

On affiche alors enfin la valeur de la variable n .

8. On souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|u_n - \alpha| < 10^{-9}$$

Or, d'après la question 5., pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$$

Comme $\alpha \geq 0$, on obtient : $1 - \alpha \leq 1$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha) \leq \frac{1}{2^n}$$

Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{2^N} \leq 10^{-9}$.

Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :

$$|u_N - \alpha| \leq \frac{1}{2^N} \leq 10^{-9}$$

Déterminons alors un entier N vérifiant : $\frac{1}{2^N} \leq 10^{-9}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq 10^9 \quad \begin{array}{l} \text{(par stricte décroissance de la} \\ \text{fonction inverse sur }]0, +\infty[) \\ \text{(par stricte croissance de la} \\ \text{fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(2) \geq 9 \ln(10) \quad (\text{car } \ln(2) > 0)$$

L'entier $N = \left\lceil \frac{9 \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ convient.

On obtient l'entier cherché par l'appel : `np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2))`.

Remarque : Si on ne connaît pas α et qu'on souhaite en calculer une approximation à 10^{-9} près, on pourra alors procéder comme suit.

```
Éditeur 1 N = np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2))
2 u = 1
3 for i in range(N) :
4     u = u / (np.exp(u) - 1)
5 print(u)
```