

Remédiation 8

Continuité d'une fonction

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Rappel :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

- f est continue en x_0 si, et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est dérivable en x_0 si, et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existent.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si, et seulement si elle est dérivable et sa dérivée est continue sur I .
- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si, et seulement si elle est dérivable à tout ordre sur I .

i Remarque

« existe » veut dire « qu'on peut trouver un réel ».

Méthode 1 :

La notion de continuité, dérivabilité, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^\infty$, ...

- fonctionne bien avec les sommes et les produit et il suffira d'écrire :

f est la somme (ou le produit) de fonction continues (dérivables, ...) sur I donc est continue (dérivable, ...) sur I .

- fonctionne moins bien avec les quotients. Il suffira juste de vérifier que le dénominateur ne s'annule pas et d'écrire :

f est le quotient de fonction continues (dérivables, ...) dont le dénominateur ne s'annule pas sur I donc est continue (dérivable, ...) sur I .

- fonctionne avec les fonctions $\ln$ et $\sqrt{}$ mais en faisant attention :

f est continue (dérivable, ...) et à valeurs strictement positives sur I donc $\ln(f)$ (ou $\sqrt{f}$) est continue (dérivable, ...) sur I d'après les théorèmes sur les composées.

i Remarque

Dans le cas de $\sqrt{f}$, on pourra se contenter de « valeurs positives ou nulles » mais seulement pour la continuité.

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

Commentaires : Si $x \neq 0$, $e^x \neq 1$ d'où $e^x - 1 \neq 0$ et il n'y a aucun soucis donc on peut écrire :

Pour $x \neq 0$, f est le quotient de fonction continues dont le dénominateur ne s'annule pas donc est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Commentaires : On vient de prouver que f était continue partout pour $x \neq 0$. Il reste à s'occuper de ce cas :

**Idée**

On revient à la définition.

Au voisinage de 0, $\frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Comme $f(0) = 1$ par définition (de f), $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ et f est continue en 0.

Conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$.