

Remédiation 6

Puissance d'une matrice -- À l'aide de la formule du binôme

Exercise 1 [CORRECTION p. 1]

$$\text{On note } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.
2. Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. D'après les propriétés de la somme matricielle, on a :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{I} + \mathbf{N},$$

où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Par produit matriciel, on trouve :

$$\mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut :

$$\forall k \in \mathbb{N}, N^k = \begin{cases} I & \text{si } k = 0 \\ N & \text{si } k = 1 \\ 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

- 3.

Rappel – Binôme de Newton matriciel :

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, si $AB = BA$ alors :

$$\begin{aligned} (A+B)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k} & \text{et} & \quad (A-B)^p = \sum_{k=0}^p (-1)^{n-k} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^{p-k} \times B^k & & \quad = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} A^{p-k} \times B^k \end{aligned}$$

(Binôme de Newton).

D'après la question précédente, on a $T = N - I$.

Les matrices I et N commutent car la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

Soit $n \geq 1$.

i Remarque

Un simple calcul matriciel !

i Remarque

Un simple calcul matriciel
encore !

 **À retenir**

On dit que la matrice N est nilpotente (d'indice 2).

! Attention

Ne pas oublier de préciser la commutativité !

$$\begin{aligned}
T^n &= (N - I)^n \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k I^{n-k} && \text{(on préfère la formule où les puissance de } N \text{ augmentent)} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k && \text{(propriétés de } I) \\
&= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k && \text{(à partir de } k = 2, \text{ les puissances de } N \text{ sont nulles)} \\
&= \binom{n}{0} (-1)^n N^0 + \binom{n}{1} (-1)^{n-1} N^1 && \text{(on décompose la somme)} \\
&= (-1)^n I + n(-1)^{n-1} N && \left(\binom{n}{0} = 1 \text{ et } \binom{n}{1} = n \right) \\
&= (-1)^n (I - nN) && \text{(on factorise par } (-1)^n)
\end{aligned}$$

Comme $(-1)^0(I - 0 \cdot N) = I$ et $T^0 = I$, la formule reste vraie pour $n = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, T^n &= (-1)^n (I - nN) \\
&= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$