

Remédiation 5

Inverse d'une matrice -- À l'aide d'un système

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation $AX = B$ d'inconnue X et en déduire que A est inversible.

💡 Idée

Si l'on trouve une unique solution, cela ne peut être que $A^{-1}B$ i.e. que A est inversible.

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

On résout le système par opérations élémentaires sur les lignes :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y - 2z = a \\ -2x \quad \quad - z = b \\ 6x - 3y + 2z = c \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} -x + 2y \quad \quad = a - 2b \\ -2x \quad \quad - z = b \\ 2x - 3y \quad \quad = 2b + c \end{cases}$$

On s'attaque aux z .

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} -x + 2y \quad \quad = a - 2b \\ -4y - z = -2a + 5b \\ y \quad \quad = 2a - 2b + c \end{cases}$$

On s'attaque aux x .

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x \quad \quad = -3a + 2b - 2c \\ -z = 6a - 3b + 4c \\ y \quad \quad = 2a - 2b + c \end{cases}$$

On s'attaque aux y .

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftrightarrow -L_3 \end{matrix} \begin{cases} x = 3a - 2b + 2c \\ y = 2a - 2b + c \\ z = 6a - 5b + 4c \end{cases}$$

On arrange.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On réécrit sous forme matricielle.

Conclusion, A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.