

Remédiation 4

Puissance d'une matrice -- À l'aide d'une dia ou trigonalisation

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$ et en déduire $\forall n \in \mathbb{N}, A^n$.

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. Tout d'abord,

$$AP = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T.$$

On a bien $P^{-1}AP = T$.

2. Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n) : P^{-1}A^nP = T^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : D'une part, $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.

D'autre part : $T^0 = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n && \text{(définition de la puissance)} \\ &= P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP && \text{d'après la question précédente et } \mathcal{P}(n) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A^nP && \text{(par associativité du produit matriciel)} \\ &= P^{-1}AIA^nP && \text{(définition de l'inverse)} \\ &= P^{-1}A^{n+1}P && \text{(neutralité de } I \text{ pour le produit matriciel)} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Synthèse : La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n.$$

En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} , on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}.$$

✂ Méthode

Une propriété qui dépend de $n \in \mathbb{N}$ doit tout de suite vous faire penser à une démonstration par récurrence.

i Remarque

Un simple calcul matriciel !

💡 Idée

Cette question va servir pour l'initialisation de la récurrence qui arrive.

⚠ Attention

$\forall n \in \mathbb{N}$ ne doit pas se trouver dans la définition de $\mathcal{P}(n)$!

✂ Méthode

On vient de prouver l'hérédité de $\mathcal{P}$.

⚠ Attention

Ne pas oublier la synthèse !