

Remédiation 3

Inverse d'une matrice -- par les opérations élémentaires

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

Méthode 1 :

1. On effectue les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de P et de I en même temps jusqu'à transformer P en I .
2. Si on n'y arrive, P est inversible et P^{-1} est la matrice obtenue à partir de I après toutes les opérations.
3. Sinon, P n'est pas inversible.

On considère la matrice dite « augmentée »

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan

Pour ne pas se tromper, il y a un ordre à respecter dans l'élimination :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \textcircled{4} & \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{0} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- (1). On effectue l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- (2). On effectue l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

La matrice réduite obtenue est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. À ce stade, on sait déjà que P est inversible.
On continue pour trouver P^{-1} .

À retenir

L'algorithme de Gauss revient à échelonner la matrice.

Celui de Jordan à la réduire.

Idée

On sait ici que P est inversible.

(3). On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

(4). Rien à faire ici.

Finalement, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Commentaires : Formellement, effectuer une opération élémentaire sur les lignes revient à multiplier à gauche par une certaine matrice inversible dite justement d'opérations élémentaires.

Après toutes les étapes, on a donc multiplié à gauche par un produit de matrices inversibles soit une matrice inversible B telle que BP = I. C'est bien la définition de l'inversibilité de P.

Ce qui est encore plus fort c'est qu'on peut écrire BI = B i.e. effectuer les mêmes opérations élémentaires sur la matrice I la transforme en B soit l'inverse de P. Magique !