

Remédiation 2

Montrer qu'un espace est un SEV -- par un Vect

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

On considère $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et on note $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F .

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

✂ Méthode

Par définition, un Vect est un espace vectoriel donc il suffit de montrer que F est un Vect d'une certaine famille.

💡 Idée

Il suffit juste de traduire la définition de F et de résoudre un système linéaire. Pas plus !

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Commentaires : On traduit ce que veut dire $X \in F$:

$$X \in F \iff AX = -X$$

(on traduit ce que veut dire $X \in F$)

$$\iff \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -5x + 2y - 2z = -x \\ -2x - z = -y \\ 6x - 3y + 2z = -z \end{cases}$$

(on transforme en système linéaire)

$$\iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

(on met toutes les inconnues du même côté)

$$\xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1} \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

(on prépare le pivot)

$$\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

(on applique l'algorithme de Gauss)

Il ne reste plus qu'une équation pour trois inconnues. Le système admet donc 2 inconnues secondaires x et z par exemple.

$$\iff \begin{cases} x = x \\ y = 2x + z \\ z = z \end{cases}$$

(on exprime l'inconnue principale x en fonction des inconnues secondaires)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 2x + z \\ z = z \end{cases} \quad (\text{on exprime l'inconnue principale } x \text{ en fonction des inconnues secondaires})$$

$$\Leftrightarrow X = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{on revient à l'écriture matricielle})$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad (\text{on traduit les combinaisons linéaires en terme de Vect.})$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (par définition d'un Vect).

Commentaires : Reste à trouver la dimension de F . Pour cela, on en cherche une base.

Génératrice : Par définition du Vect, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est déjà génératrice de F . Reste à montrer qu'elle est libre.

Liberté : Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dont les coordonnées ne sont pas proportionnelles ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de F .

Base : Libre et génératrice de F , la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme donc une base de F .

Le sous-espace F admet une base de deux éléments donc F est de dimension 2.