

## Remédiation 1

## Inverse d'une matrice -- par un polynôme annulateur

## Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

On désigne par  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et on considère  $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $(A + I)^2$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

## Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. Tout d'abord :

$$A + I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (A + I)^2 &= \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

2. On développe le résultat de la question précédente :

$$(A + I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \iff A^2 + 2A + I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \text{ car les matrices } A \text{ et } I \text{ commutent.}$$

On en déduit :

$$A^2 + 2A + I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

On se focalise sur  $I$

$$A^2 + 2A = -I$$

$$-A^2 - 2A = I$$

On s'en rapproche

$$A(-A - 2I) = I$$

On cherche une matrice  $B$  en facteur donc on factorise

On en déduit que la matrice  $A$  est inversible, d'inverse  $-A - 2I$  :

$$A^{-1} = -A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Remarque :** On peut vérifier vite fait sur un ou deux coefficients que l'on a bien

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -6 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$