

Remédiation 9

Rappels (très succincts) sur les variables aléatoires

1. NOTIONS FONDAMENTALES

Définition 1 – Notions de base sur les variables aléatoires :

- **Variable aléatoire réelle (v.a.r.)** : Une application $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'univers Ω d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
- **Support d'une v.a.r.** $\mathbb{X}$: L'ensemble noté $\mathbb{X}(\Omega)$ de toutes les valeurs prises par la variable $\mathbb{X}$.
- **Variable aléatoire discrète** : Une v.a.r. $\mathbb{X}$ dont le support $\mathbb{X}(\Omega)$ est un ensemble **fini** ou **dénombrable** (assimilable à une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$).
- **Loi de probabilité (ou loi de $\mathbb{X}$)** : La donnée de l'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$ et des probabilités $\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$ pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$.
- **Événement** $[\mathbb{X} = x]$: L'ensemble des éventualités $\omega \in \Omega$ telles que $\mathbb{X}(\omega) = x$.
- **Système Complet d'Événements (SCE) associé à $\mathbb{X}$** : La famille d'événements $([\mathbb{X} = x])_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$ forme un SCE de Ω .
- **Fonction de répartition** $F_{\mathbb{X}}$: L'application $F_{\mathbb{X}} : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_{\mathbb{X}}(x) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq x)$.

💡 Idée

On dit souvent qu'une variable aléatoire réelle est une fonction gain.

💡 Idée

On cherche la probabilité de gagner x .

⚠ Attention

Cela doit être un réflexe : support puis loi.

Méthode 1 – Comment déterminer la loi d'une v.a.r. $\mathbb{X}$? :

Pour déterminer la loi de $\mathbb{X}$, il faut **toujours** procéder en 2 étapes :

1. **Déterminer le support $\mathbb{X}(\Omega)$** : Identifier clairement l'ensemble de toutes les valeurs possibles prises par $\mathbb{X}$.
2. **Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$ pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ via la méthode appropriée :**
 - **Reconnaissance d'une loi usuelle** : Schéma de Bernoulli répété, rang du 1^{er} succès, tirages équiprobables, etc.
 - **Formule des Probabilités Totales (FPT)** : Si $\mathbb{X}$ dépend d'une autre variable $\mathbb{Y}$, utiliser le SCE $([\mathbb{Y} = y])_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}(\mathbb{Y} = y) \mathbf{P}_{[\mathbb{Y}=y]}(\mathbb{X} = x)$$

- **Passage par la fonction de répartition $F_{\mathbb{X}}$** : Privilégier cette voie pour les extremums ($M = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ou $m = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$) :

$$\mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq x) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x] \cap [\mathbb{Y} \leq x])$$

$$\mathbf{P}(\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) > x) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > x] \cap [\mathbb{Y} > x])$$

- **Événements équivalents** : Décomposer $[X = k]$ sous forme d'une intersection d'événements élémentaires.

2. ESPÉRANCE, VARIANCE ET INDÉPENDANCE

Définition 2 – Espérance $E(X)$:

- **Définition** : X admet une espérance si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$ est **absolument convergente**. On a alors :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

- **Linéarité** : Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (toujours vraie).

- **Théorème de transfert** : $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x)$ converge absolument. Alors :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x)$$

- **Positivité / Monotonie** : Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.
Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Définition 3 – Variance $V(X)$ & Écart-type $\sigma(X)$:

- **Définition** : X admet une variance si X^2 admet une espérance. Alors :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

- **Formule de König-Huygens** : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
— **Propriétés** : Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

De plus, $V(X) \geq 0$.

Proposition 1 – Indépendance et propriétés :

- **Indépendance** : X et Y sont indépendantes si, et seulement si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y).$$

- **Propriétés sous indépendance** :

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad \text{et} \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Idée

La moyenne des gains pondérés par leur probabilité ;

À retenir

On garde les probabilités et on prend l'image des gains.

Idée

La racine de la moyenne des écarts à la moyenne au carré.

Attention

Pour TOUS les couples de gains !

3. TABLEAU RÉSUMÉ DES 5 LOIS USUELLES DISCRÈTES

Loi	Support $\mathbb{X}(\Omega)$	$\mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$	Espérance $\mathbf{E}(\mathbb{X})$	Variance $\mathbf{V}(\mathbb{X})$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) = p,$ $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2 - 1}{12}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

4. EXERCICES TYPES DE REPRISE

Exercice 1 – (Probabilités totales (Lois uniforme & binomiale)) [CORRECTION P. 3]

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire une boule au hasard et on note $\mathbb{X}$ son numéro. Puis, on lance $\mathbb{X}$ fois une pièce équilibrée. On note $\mathbb{Y}$ le nombre de "Pile" obtenus.

- Donner la loi de $\mathbb{X}$, son espérance et sa variance.
- Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$ pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.
- Exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0)$.

Exercice 2 – (Formule de transfert (Loi Géométrique)) [CORRECTION P. 4]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

- Rappeler $\mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.
- Soit $\mathbb{Y} = (-1)^{\mathbb{X}}$. Déterminer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ à l'aide du théorème de transfert.

Exercice 3 – (Somme et Indépendance (Loi de Poisson)) [CORRECTION P. 4]

Soient $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables aléatoires **indépendantes**.

- Rappeler $\mathbf{E}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$.
- Déterminer la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

- $\mathbb{X} \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$. Donc $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$, $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{N+1}{2}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{N^2 - 1}{12}$.
- Sachant $[\mathbb{X} = k]$, $\mathbb{Y}$ compte le nombre de "Pile" lors de k lancers indépendants avec une pièce équilibrée. La loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(k, \frac{1}{2}\right)$.
- D'après la formule des probabilités totales avec le SCE $([\mathbb{X} = k])_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y} = 0) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^N}{1 - 1/2} = \frac{1 - (1/2)^N}{N}$$

Correction de l'exercice 2 : [ÉNONCÉ]

1. $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{q}{p^2}$.
2. D'après le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k p q^{k-1} = -p \sum_{k=1}^{+\infty} (-q)^{k-1}$$

Puisque $|-q| = q < 1$, la série géométrique converge et :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = -p \cdot \frac{1}{1 - (-q)} = \frac{-p}{1 + q} = \frac{-p}{2 - p}$$

Correction de l'exercice 3 : [ÉNONCÉ]

1. Par linéarité, $\mathbf{E}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) + \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \lambda_1 + \lambda_2$.
Par indépendance, $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \lambda_1 + \lambda_2$.
2. $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le SCE $([\mathbb{X} = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\mathbb{X} = k \cap \mathbb{Y} = n - k) \underset{\text{indép.}}{=} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathbf{P}(\mathbb{Y} = n - k)$$

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}$$

Ainsi, $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.