

IV

Rappels 1 Variables aléatoires

Plan du chapitre

I VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE	2
I.1 DÉFINITIONS	2
I.2 FONCTION DE RÉPARTITION	3
I.3 LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE	6
II VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTE ET FINIES	7
II.1 RAPPELS	7
II.2 FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE	8
II.3 LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE	8
II.4 SYSTÈME COMPLET D'ÉVÉNEMENTS ASSOCIÉ À UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE	11
III ESPÉRANCE ET VARIANCE	13
III.1 ESPÉRANCE ET LA FORMULE DE TRANSFERT	13
III.2 MOMENTS ET VARIANCE	14
III.3 CAS DES LOIS USUELLES DISCRÈTES	15
IV INDÉPENDANCE	17
IV.1 CAS GÉNÉRAL	17
IV.2 CAS DISCRET	18
IV.3 LIEN AVEC L'ESPÉRANCE	19
IV.4 LIEN AVEC LA VARIANCE	19

I. VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE

I.1 – Définitions

Définition 1 – Variable aléatoire réelle :

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on appelle *variable aléatoire réelle* toute application :

$$\begin{aligned} \mathbb{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \mathbb{X}(\omega). \end{aligned}$$

telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.

Idée

Ce qu'il faut retenir c'est qu'une variable aléatoire est une application $\mathbb{X}$ de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que l'ensemble des événements qui impliquent $\mathbb{X}$ doivent être observables i.e. être dans la tribu $\mathcal{A}$.

En pratique, on ne vérifiera jamais qu'une application est bien une variable aléatoire, cela sera toujours sous entendu.

Notation : Dans la suite, pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on note :

- $[\mathbb{X} \in I] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) \in I\}$.
- $[\mathbb{X} = x] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) = x\}$.
- $[\mathbb{X} \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) \leq x\}$.

Ainsi, $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire si pour tout réel x , l'ensemble $[\mathbb{X} \leq x] \in \mathcal{A}$ est un événement.

Exemple 1 :

Soit $A \in \mathcal{A}$.

La fonction indicatrice

$$\mathbb{1}_A : \omega \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

est une variable aléatoire réelle.

Remarque : Elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbf{P}(A)$.

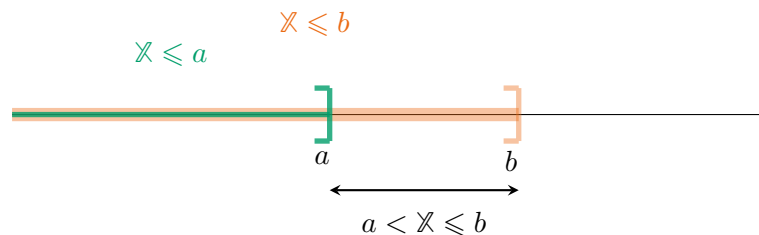
Remarques :

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire réelle, alors $[\mathbb{X} \in]a; b]$ est un événement.

En effet,

$$[\mathbb{X} \in]a; b] = [\mathbb{X} \leq b] \setminus [\mathbb{X} \leq a] = [\mathbb{X} \leq b] \cap \overline{[\mathbb{X} \leq a]} \in \mathcal{A} \quad \text{car} \quad [\mathbb{X} \leq a], [\mathbb{X} \leq b] \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent, le réel $\mathbf{P}([\mathbb{X} \in]a; b])$ est bien défini.



- La donnée des probabilités $\mathbf{P}([\mathbb{X} \in]a; b])$ pour tous réels $a < b$ définit la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle $\mathbb{X}$.

Proposition 1 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

P1 • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\overline{[\mathbb{X} \leq x]} = [\mathbb{X} > x]$.

P2 • Pour tous $x < y < z$, (Relation de Chasles)

$$[x \leq \mathbb{X} \leq y] \cup [y \leq \mathbb{X} \leq z] = [x \leq \mathbb{X} \leq z].$$

P3 • Pour tous $x < y$, $[\mathbb{X} \leq x] \subset [\mathbb{X} \leq y]$.

P4 • Soient I et J deux intervalles disjoints, alors $[\mathbb{X} \in I] \cap [\mathbb{X} \in J] = \emptyset$.

P5 • Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ formant une partition de $\mathbb{R}$, alors la famille d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \geq 0, A_n = [\mathbb{X} \in I_n],$$

forme un système complet d'événements.

Proposition 2 – Opérations sur les variables aléatoires :

Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Alors,

- la combinaison linéaire $\lambda \mathbb{X} + \mu \mathbb{Y}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- le produit $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}$,
- le maximum $\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et le minimum $\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$

sont encore des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Remarque : Cela s'étend à un nombre fini de variables aléatoires.

I.2 – Fonction de répartition**Définition 2 – Fonction de répartition :**

Soit $\mathbb{X}$, une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On définit la fonction $F_{\mathbb{X}}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{\mathbb{X}}(x) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x]).$$

La fonction $F_{\mathbb{X}}$ est la *fonction de répartition* de la variable aléatoire $\mathbb{X}$.

Exemple 2 :

En généralisant l'exercice précédent, la fonction de répartition d'une loi uniforme discrète sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ est donnée par l'expression

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{n} & \text{si } x \in [1 ; n] \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

Méthode

À la fin de chaque calcul d'une fonction de répartition, il est toujours utile de vérifier rapidement les trois premiers points.

Proposition 3 – Propriétés de la fonction de répartition :

Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et F_X sa fonction de répartition.

- P1** • $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X > a) = 1 - F_X(a).$
- P2** • Pour tout $t \in \mathbb{R}, F_X(t) \in [0; 1].$
- P3** • F_X est croissante : $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad t_1 \leq t_2 \implies F_X(t_1) \leq F_X(t_2).$
- P4** • $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1.$
- P5** • F_X est continue à droite : $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} F_X(t) = F_X(a).$
- P6** • $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b, \quad \mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$

Preuve :

- P1** • Par définition de la fonction de répartition, $F_X(a) = \mathbf{P}(X \leq a).$

Or, les événements $\{X \leq a\}$ et $\{X > a\}$ sont complémentaires dans Ω , donc disjoints et leur réunion est Ω .

Ainsi, $\mathbf{P}(X \leq a) + \mathbf{P}(X > a) = 1.$

On en déduit immédiatement :

$$\mathbf{P}(X > a) = 1 - \mathbf{P}(X \leq a) = 1 - F_X(a).$$

- P2** • La probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1.

- P3** • Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Par croissance de la probabilité, on a :

$$\begin{aligned} t_1 \leq t_2 &\implies [X \leq t_1] \subset [X \leq t_2] \\ &\implies \mathbf{P}([X \leq t_1]) \leq \mathbf{P}([X \leq t_2]) \\ &\implies F_X(t_1) \leq F_X(t_2). \end{aligned}$$

- P4** • La fonction F_X est croissante et majorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, la limite de F_X en $+\infty$ existe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = [X \leq n]$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, donc d'après le **théorème (??)** de la limite monotone pour les probabilités :

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n).$$

Par croissance de F_X ,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in \mathbb{R}}} F_X(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} F_X(n) = 1.$$

Procédons de même pour la limite de F_X en $-\infty$:

F_X est croissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, la limite de F_X en $-\infty$ existe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = [X \leq -n]$. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le **théorème (??)** de la limite monotone pour les probabilités :

$$0 = \mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n).$$

Par croissance de F_X ,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n) = 0.$$

- P5** • Soit $a \in \mathbb{R}$. De nouveau, le théorème de la limite monotone pour les fonctions justifie l'existence de la limite à droite en a de la fonction de répartition.

Étudions la limite de $F_X\left(a + \frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $C_n = \left[X \leq a + \frac{1}{n}\right]$. La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les probabilités :

$$F_X(a) = \mathbf{P}([X \leq a]) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Donc, } F_X(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} F_X(t).$$

- P6** • Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, sachant que $[X \leq a] \subset [X \leq b]$ on a

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbf{P}(X \leq b) - \mathbf{P}(X \leq a) = \mathbf{P}([X \leq b] \setminus [X \leq a]) = \mathbf{P}(a < X \leq b).$$



Grâce au théorème de la limite monotone, on sait qu'une fonction de répartition admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

En fait, toutes les fonctions de répartition que l'on considérera seront continues par morceaux.

⚠ Attention

Il existe cependant des variables aléatoires dont la fonction de répartition n'est pas continue par morceaux mais on n'en parlera pas.

Théorème 4 – Caractérisation d'une fonction de répartition :

Une application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si, et seulement si elle satisfait les trois points suivants :

- (i) F est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - (ii) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
 - (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- (i) De plus, on dispose de l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X \leq x) - \mathbf{P}(X < x) = F(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F(t).$$

Corollaire 5 :

Une fonction de répartition F est croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en tout point sauf en un ensemble au plus dénombrable de points (x_i) .

En chacun de ces points,

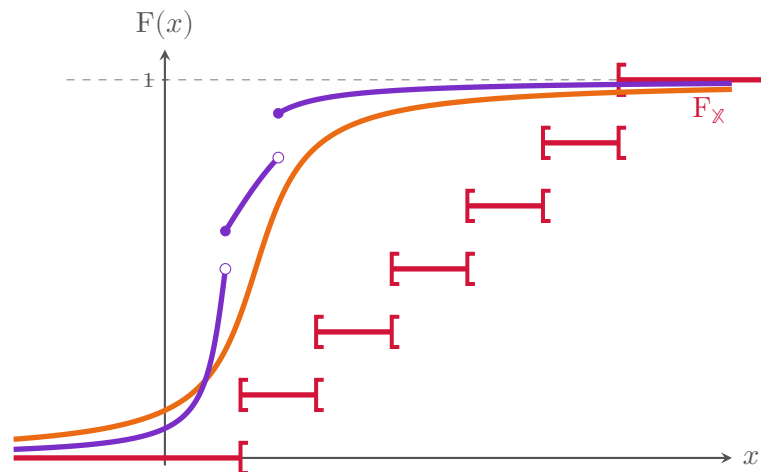
$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} F(x) < F(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} F(x),$$

et le saut est égal à

$$F(x_i) - F(x_i^-) = \mathbf{P}(X = x_i).$$

Exemple 3 :

Les trois courbes suivantes sont celles de fonctions de répartition de variables aléatoires réelles.



En effet, elles sont toutes les trois croissantes, continues sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre dénombrable de points où elles sont seulement continues à droite, et elles sont bien de limite 0 et 1 respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

À retenir

F_X est constante par morceaux si, et seulement si X est discrète.

I.3 – Loi d'une variable aléatoire

Définition 3 – Loi d'une variable aléatoire :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire.

On appelle **loi de la variable** X l'application $\mathbf{P}_X$ définie par :

$$\mathbf{P}_X : A \mapsto \mathbf{P}([X \in A]),$$

où A est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Attention

Y suit la même loi que X n'implique pas que $Y = X$.

Contre-exemple 4 – Avoir la même loi ne signifie pas être égales :

On lance deux pièces équilibrées indépendantes et on définit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la première pièce donne Pile,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième pièce donne Pile,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\mathbf{P}([X = 1]) = \mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X = 0]) = \mathbf{P}([Y = 0]) = \frac{1}{2},$$

Les variables X et Y ont donc la même loi ce qui s'écrit $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$.

Cependant, $\mathbf{P}([X = Y]) = \mathbf{P}(\{PP, FF\}) = \frac{1}{2} \neq 1$ et par conséquent $X \neq Y$.

Théorème 6 – Caractérisation de la fonction de répartition :

Une application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle $\mathbb{X}$ si, et seulement si elle satisfait les trois points suivants :

- (i) F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- (ii) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

De plus, on dispose de l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(\mathbb{X} = x) = P(\mathbb{X} \leq x) - P(\mathbb{X} < x) = F(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F(t).$$

Proposition 7 – Caractérisation de la loi :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

La fonction de répartition de $\mathbb{X}$ caractérise la loi de $\mathbb{X}$.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{\mathbb{X}}(x) = \mathbf{P}_{\mathbb{X}}([-\infty; x]).$$

Deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition si, et seulement si elles ont la même loi.

Dans la pratique, on utilisera la fonction de répartition pour déterminer la loi d'une variable aléatoire :

À retenir

Deux variables aléatoires ont même loi si, et seulement si elles ont même fonction de répartition.

$$\mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ ont même fonction de répartition} \iff \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ ont même loi de probabilité}$$

II. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTE ET FINIES**II.1 – Rappels**

Dans le cas où $\mathbb{X}(\Omega)$ est fini ou dénombrable, la définition de la variable aléatoire se simplifie.

Définition 4 – Variable aléatoire discrète :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

Une variable aléatoire réelle $\mathbb{X}$ est dite *discrète* lorsque son ensemble image $\mathbb{X}(\Omega)$, i.e. l'ensemble des valeurs prises par $\mathbb{X}$, est dénombrable.

On dit plus précisément que $\mathbb{X}$ est une variable *discrète finie* lorsque $\mathbb{X}(\Omega)$ est un ensemble fini et *discrète infinie* lorsque $\mathbb{X}(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

Attention

Il existe des variables aléatoires infinies qui ne sont pas discrètes.

Exemples 5 :

- Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{1}_A$ est discrète finie car $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$.
- Si $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{X}$ est discrète infinie car $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}$.

II.2 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Dans la pratique, les x_i forment (presque) toujours une suite strictement croissante $x_1 < x_2 < \dots$. Dans ce cas, la fonction de répartition est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

⚠ Attention

Il existe des variables aléatoires discrètes pour lesquelles on ne peut pas ordonner l'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$.

Théorème 8 – Caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète :

Une application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète $\mathbb{X}$ si, et seulement si elle satisfait les trois points suivants :

- (i) F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- (ii) F est en escalier et continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{\substack{x_i \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x_i \leq x}} P(\mathbb{X} = x_i).$$

 **Preuve :** Il suffit de montrer que :

$$[\mathbb{X} \leq x] = \bigcup_{\substack{x_i \leq x \\ i \in I}} [\mathbb{X} = x_i].$$

On raisonne par double inclusions.

$\subset$: Soit $\omega \in [\mathbb{X} \leq x]$. Alors $\mathbb{X}(\omega) \leq x$.

Or $\mathbb{X}(\omega)$ est un élément du support de $\mathbb{X}$ donc s'écrit sous la forme x_i pour un certain $i \in I$ et $\omega \in [\mathbb{X} = x_i] \subset \bigcup_{\substack{x_i \leq x \\ i \in I}} [\mathbb{X} = x_i]$.

$\supset$: Soit $\omega \in \bigcup_{\substack{x_i \leq x \\ i \in I}} [\mathbb{X} = x_i]$.

Alors ω est un élément de l'un des événements $[\mathbb{X} = x_i]$ avec $i \in I$ et $x_i \leq x$.

Ainsi, $\mathbb{X}(\omega) = \{x_i \leq x\}$ donc $\omega \in [\mathbb{X} \leq x]$.

Les événements $[\mathbb{X} = x_i]$ sont deux à deux incompatibles. La σ -additivité de $\mathbf{P}$ fait le reste. 

II.3 – Loi d'une variable aléatoire discrète

Proposition 9 – Loi d'une variable discrète infinie :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors :

— On appelle *loi de probabilité* de $\mathbb{X}$ et on note $\mathbf{P}_{\mathbb{X}}$ l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbb{X}} : \mathbb{X}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathbf{P}_{\mathbb{X}}(x) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]). \end{aligned}$$

— De plus, si les x_i forment une suite strictement croissante $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$, alors

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = x_1]) = F_{\mathbb{X}}(x_1) \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2, \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_k]) = F_{\mathbb{X}}(x_k) - F_{\mathbb{X}}(x_{k-1}).$$

Vocabulaire : Donner la loi d'une variable aléatoire discrète $\mathbb{X}$ signifie donner l'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$ des valeurs prises par $\mathbb{X}$ et pour chaque $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$.

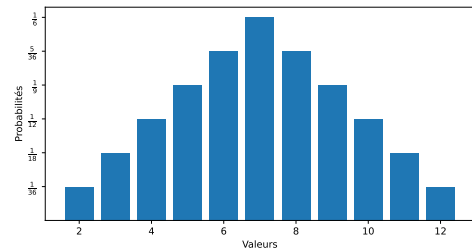
On donne parfois la loi sous forme d'un tableau.

Par exemple, la variable aléatoire $\mathbb{X}$, somme des valeurs de deux dés équilibrés a pour loi :

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}(\mathbb{X} = i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

On peut aussi représenter la loi à l'aide d'un diagramme en bâtons.

En abscisse, on place les valeurs possibles de la variable (ici, 2, 3, ..., 12) et en ordonnée les probabilités correspondantes (ici, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 2)$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 3)$, ..., $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 12)$).



Et le code en **Python** :

```

1  import matplotlib.pyplot as plt
2
3  # Données
4  val = [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
5  loi = [1/36,1/18,1/12,1/9,5/36,1/6,
6         5/36,1/9,1/12,1/18,1/36]
7
8  # Création de la figure
9  fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,4))
10
11 # Diagramme en bâtons
12 ax.bar(val, loi)
13
14 # Graduations personnalisées
15 ticks = [1/36,1/18,1/12,1/9,5/36,1/6]
16
17 ax.set_yticks(ticks)
18
19 ax.set_yticklabels([
20     r"$\frac{1}{36}$",
21     r"$\frac{1}{18}$",
22     r"$\frac{1}{12}$",
23     r"$\frac{1}{9}$",
24     r"$\frac{5}{36}$",
25     r"$\frac{1}{6}$"
26 ])
27
28 # Titres
29 ax.set_xlabel("Valeurs")
30 ax.set_ylabel("Probabilités")
31
32 # Affichage
33 plt.show()

```

Remarque : À partir de la fonction de répartition F_X , on peut retrouver :

- $X(\Omega)$: c'est l'ensemble des points x_i de discontinuité de F_X ;
- $P(X = x_i)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$: c'est la « hauteur du saut » à l'abscisse x_i .

Et réciproquement, à partir de $X(\Omega)$ et des probabilités $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$, on peut reconstruire la loi F_X de X . Ainsi on a la

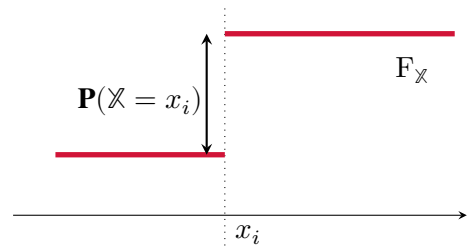
Proposition 10 – Caractérisation de la loi d'une variable discrète :

Soit X une variable aléatoire discrète.

Alors la loi de X est entièrement caractérisée par la donnée :

1. de l'ensemble image $X(\Omega)$ de X ;
2. de tous les $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Dès lors, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes ayant la même fonction de répartition, on a



$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$$

et pour tout indice i ,

$$P([X = x_i]) = P([Y = x_i]).$$

On retrouve l'égalité en loi.

Méthode 1 – Loi d'une variable aléatoire discrète :

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X , on ne donne généralement pas la fonction de répartition, mais on explicitera plus simplement :

1. l'ensemble image $X(\Omega)$ de la variable X ;
2. la valeur de $P(X = x_i)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$.

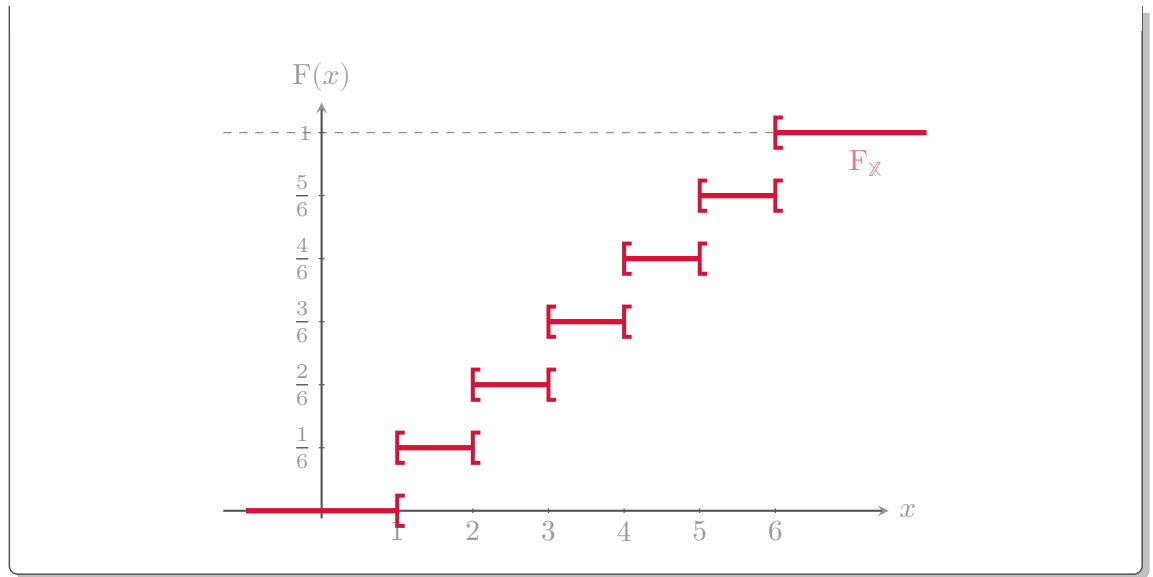
Exemple 6 :

Soit X , la variable aléatoire donnant la valeur d'un dé équilibrée.

La loi de X est donnée par :

$$X(\Omega) = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket \quad \text{et} \quad P(X = i) = \frac{1}{6} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq 6.$$

Quel est le graphe sur $[-1 ; 7]$ de F_X .



II.4 – Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète

À une v.a discrète $\mathbb{X}$ est associée le système complet d'événements $([\mathbb{X} = x])_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$.

Proposition 11 – SCE associé à une v.a.r. discrète :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire **discrète** de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On note $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$.

Alors la famille $([\mathbb{X} = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$.

Preuve : Il y a deux propriétés à démontrer.

1. Montrons que $([\mathbb{X} = x_i])_{i \in I}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles :

Soit $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$ et soit $\omega \in [\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{X} = x_j]$.

Cela signifie que :

- $\omega \in [\mathbb{X} = x_i]$ donc $\mathbb{X}(\omega) = x_i$,
- $\omega \in [\mathbb{X} = x_j]$ donc $\mathbb{X}(\omega) = x_j$.

Par définition, $x_i \neq x_j$.

On en conclut qu'il n'existe pas d'élément $\omega \in [\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{X} = x_j]$.

Ainsi $[\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{X} = x_j] = \emptyset$.

2. Montrons que $\Omega = \bigcup_{i \in I} [\mathbb{X} = x_i]$ par double inclusion :

- $\bigcup_{i \in I} [\mathbb{X} = x_i] \subset \Omega$ puisque $\bigcup_{i \in I} [\mathbb{X} = x_i]$ est un événement (en tant qu'union dénombrable d'événements).
- Soit $\omega \in \Omega$.

Alors $\mathbb{X}(\omega) \in \mathbb{X}(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$.

Ainsi, il existe $i \in I$ tel que $\mathbb{X}(\omega) = x_i$ i.e. $\omega \in [\mathbb{X} = x_i]$.



En particulier, il vient

Corollaire 12 :

Si $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire discrète, alors

1. $\forall x \in \mathbb{X}(\Omega), \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \geq 0$;
2. la famille $(\mathbf{P}([\mathbb{X} = x]))_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Théorème 13 – Caractérisation d'une loi de probabilité :

Soient I un ensemble fini ou dénombrable, et $(p_k)_{k \in I}$ une famille de réels satisfaisant :

- (i) $\forall k \in I, p_k \geq 0$;
- (ii) la famille $(p_k)_{k \in I}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Alors la famille $(p_k)_{k \in I}$ définit une loi de probabilité, c'est-à-dire qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire discrète $\mathbb{X}$ sur cet espace tels que :

$$\mathbb{X}(\Omega) = I \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = p_k \text{ pour tout } k \in I.$$

Méthode 2 – Loi de probabilité discrète :

Pour montrer que $(p_k)_{k \in I}$ définit une loi de probabilité, on vérifiera que :

— si $I = \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$(i) \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, p_k \geq 0,$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^n p_k = 1.$$

— si $I = \mathbb{N}$,

$$(i) \quad \forall k \in \mathbb{N}, p_k \geq 0,$$

$$(ii) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \text{ converge et sa somme est égale à } 1.$$

Exemple 7 – I :

existe une variable aléatoire $\mathbb{Y}$ satisfaisant $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.

$$(i) \quad \text{Il est assez clair que } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, p_k = \frac{1}{k(k+1)} \geq 0,$$

(ii) En reconnaissant une somme télescopique, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme vaut 1.

On définit bien une variable aléatoire $\mathbb{Y}$ sur $\mathbb{N}^*$ donnée par sa loi de probabilité $\mathbf{P}([\mathbb{Y} = k]) = \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

III. ESPÉRANCE ET VARIANCE

If there is a 50-50 chance that something can go wrong, then nine times out of 10 it will.

Paul Harvey
Animateur radio américain (1918-2009)

III.1 – Espérance et la formule de transfert

Définition 5 – Espérance :

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. On note $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

On dit que X admet une *espérance*, notée $E(X)$, si la série de terme général $x_k P(X = x_k)$ est absolument convergente.

Alors on définit l'espérance de X par

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k).$$

⚠ Attention

Certaines variables aléatoires n'admettent pas d'espérance.

Il faut vérifier que l'espérance est bien définie et ne dépend pas du choix de l'indexation $X(\Omega)$.

Contre-exemple 8 – Variable aléatoires sans espérance :

On considère une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et telle que :

$$\forall k \geq 1, P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k P(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$, série des harmonique divergente.

On en déduit que X n'admet pas d'espérance.

Proposition 14 – Propriétés de l'espérance :

Soient X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé.

Linéarité : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Croissance : Si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$.

Proposition 15 – Existence par domination :

Soient X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé.

Si Y admet une espérance et $0 \leq |X| \leq Y$ alors X admet une espérance et $|E(X)| \leq E(Y)$.

⚠ Attention

Ne pas confondre avec la propriété de croissance de l'espérance.

Théorème 16 – Formule de transfert :

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et g une application définie sur $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in I\}$.

Les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) La variable aléatoire $g(\mathbb{X})$ possède une espérance.
(ii) La série de terme général $g(x_k) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_k])$ est absolument convergente.

Dans ce cas,

$$\mathbf{E}(g(\mathbb{X})) = \sum_{k \in I} g(x_k) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_k]).$$

Exemple 9 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \lambda k.$$

Comme $\mathbb{X}$ ne peut pas prendre la valeur 0, on peut définir $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \frac{1}{\mathbb{X}}$. Quelle est la loi de $\mathbb{Z}$?

Précisons que la condition $\sum_{k=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = 1$, impose $\lambda = \frac{2}{n(n+1)}$.

Avec le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{Z}) &= \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{k}\right) \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \lambda k^2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \lambda k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \lambda + \lambda n \\ &= \frac{2n+1}{3} + \frac{2}{n+1} = \frac{2n^2 + 3n + 7}{3(n+1)}. \end{aligned}$$

Remarque : La formule de transfert permet de prouver une version faible de la linéarité de l'espérance. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{X}$, une variable aléatoire admettant une espérance $\mathbf{E}(a\mathbb{X} + b) = a\mathbf{E}(\mathbb{X}) + b$.

Preuve : Si φ est une fonction affine, $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}(a\mathbb{X} + b) = \sum_{i=1}^m (ax_i + b) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i]) = a \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i]) + \sum_{i=1}^m \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i]) = a\mathbf{E}(\mathbb{X}) + b.$$



III.2 – Moments et variance

Pour tout entier naturel s , le *moment d'ordre s* d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ est le nombre $m_s(\mathbb{X})$ défini par :

$$m_s(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^s).$$

En particulier pour $s = 1$, on retrouve l'espérance $m_1(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})$.

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, et sous réserve de convergence absolue, la formule de transfert donne :

$$m_s(\mathbb{X}) = \sum_{k \in I} x_k^s \mathbf{P}(\mathbb{X} = x_k).$$

Remarque

On montre que si $\mathbb{X}$ a un moment d'ordre r alors, $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre s pour tout entier $s \leq r$.

Remarque

Une variable aléatoire finie admet des moments à tout ordre.

Définition 6 – Variance et écart-type :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- On appelle *variance* d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$, notée $V(\mathbb{X})$, la quantité

$$V(\mathbb{X}) = E((\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2).$$

- On appelle *écart-type* de $\mathbb{X}$, noté $\sigma(\mathbb{X})$, la quantité

$$\sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{V(\mathbb{X})}.$$

Rappel

L'écart-type permet de quantifier les écarts par rapport à la moyenne. Un écart-type fort traduit un « grand éloignement » des valeurs de $\mathbb{X}$ par rapport à sa moyenne.

Remarques :

- C'est l'existence d'un moment d'ordre 2 qui permet de justifier que la variance est bien définie.
- La quantité $\sigma(\mathbb{X})$ est bien définie car $(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 \geq 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $V(\mathbb{X}) \geq 0$.

Proposition 17 – Propriétés de la variance :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- $V(\mathbb{X}) = 0$ si et seulement si $\mathbb{X}$ est une application presque sûrement constante.
- Pour tous réels a, b ,

$$V(a\mathbb{X} + b) = a^2 V(\mathbb{X}) \quad \text{et} \quad \sigma(a\mathbb{X} + b) = |a| \sigma(\mathbb{X}).$$

Vocabulaire : Une variable aléatoire $\mathbb{X}$ est dite *centrée* si $E(\mathbb{X}) = 0$.

Elle est dite *réduite* si $\sigma(\mathbb{X}) = 1$.

En pratique, on calcule la variance avec :

Théorème 18 – Formule de König-Huygens :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors

$$V(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - E(\mathbb{X})^2.$$

III.3 – Cas des lois usuelles discrètes

On dit que $\mathbb{X}$ est une *variable aléatoire certaine*, ou *presque sûrement constante* s'il existe un réel c tel que $P(\mathbb{X} = c) = 1$.

Alors,

$$E(\mathbb{X}) = c \quad \text{et} \quad V(\mathbb{X}) = 0.$$

Proposition 19 – Espérance et variance, cas discret dénombrable :

Soient $\mathbb{X}$, une variable aléatoire, $p \in]0; 1[$, $q = 1 - p$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = p$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = p(1 - p)$.
- Si $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = np$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = np(1 - p)$.
- Si $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}([1; n])$, alors $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{n^2 - 1}{12}$.
- Si $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance avec $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{q}{p^2}$.
- Si $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance avec $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \lambda$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \lambda$.

 **Preuve :** Via les fonctions génératrices

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{X}$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $[1; n]$.

On considère sa fonction génératrice $G_{\mathbb{X}}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{\mathbb{X}}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) t^k.$$

Il s'agit d'un polynôme et l'on peut dériver terme à terme :

$$G'_{\mathbb{X}}(t) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) t^{k-1}.$$

En évaluant en $t = 1$, on obtient

$$G'_{\mathbb{X}}(1) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \mathbf{E}(\mathbb{X}).$$

En dérivant une seconde fois,

$$G''_{\mathbb{X}}(t) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) t^{k-2},$$

Puis,

$$G''_{\mathbb{X}}(1) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \mathbf{E}(\mathbb{X}(\mathbb{X} - 1)).$$

Or, $\mathbb{X}(\mathbb{X} - 1) = \mathbb{X}^2 - \mathbb{X}$ entraîne $\mathbf{E}(\mathbb{X}(\mathbb{X} - 1)) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X})$.

D'où,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = G''_{\mathbb{X}}(1) + G'_{\mathbb{X}}(1).$$

Par conséquent,

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = G''_{\mathbb{X}}(1) + G'_{\mathbb{X}}(1) - (G'_{\mathbb{X}}(1))^2.$$

Par exemple, si $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $G_{\mathbb{X}}(t) = (1 - p + pt)^n$,

$$G'_{\mathbb{X}}(t) = np(1 - p + pt)^{n-1} \quad \text{et} \quad G''_{\mathbb{X}}(t) = n(n-1)p^2(1 - p + pt)^{n-2}.$$

D'où $G'_{\mathbb{X}}(1) = np$ et $G''_{\mathbb{X}}(1) = n(n-1)p^2$ qui donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{X}) &= np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ &= np(1 - p). \end{aligned}$$



IV. INDÉPENDANCE

IV.1 – Cas général

Définition 7 – Indépendance :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

D1 • On dit que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont *indépendantes* si pour tout intervalle I et J de $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} \in I] \cap [\mathbb{Y} \in J]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \in I]) \cdot \mathbf{P}([\mathbb{Y} \in J]).$$

Soit $(\mathbb{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

D2 • Les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ sont *mutuellement indépendantes* si pour tout intervalles $I_1, \dots, I_n$ de $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [\mathbb{X}_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{X}_i \in I_i]).$$

D3 • La suite $(\mathbb{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles *mutuellement indépendantes* si, pour tout $n \geq 2$, les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ sont indépendantes.

Autrement dit, deux variables aléatoires réelles $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes si pour tout intervalles I et J de $\mathbb{R}$, les événements $[\mathbb{X} \in I]$ et $[\mathbb{Y} \in J]$ sont indépendants.

Remarque : Dans ce cas, on constate que si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes alors

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad F_{\mathbb{X}}(t_1) \cdot F_{\mathbb{Y}}(t_2) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq t_1] \cap [\mathbb{Y} \leq t_2]).$$

 **Preuve :** Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$[\mathbb{X} \leq t_1] \cap [\mathbb{Y} \leq t_2] = \bigcup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega) \\ x \leq t_1, y \leq t_2}} [\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y].$$

L'union est disjointe, par la propriété d'additivité d'une probabilité, puis par la définition de l'indépendance, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq t_1] \cap [\mathbb{Y} \leq t_2]) &= \sum_{\substack{(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega) \\ x \leq t_1, y \leq t_2}} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) \\ &= \sum_{\substack{(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega) \\ x \leq t_1, y \leq t_2}} \mathbf{P}(\mathbb{X} = x) \cdot \mathbf{P}(\mathbb{Y} = y) \\ &= \left(\sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x \leq t_1}} \mathbf{P}(\mathbb{X} = x) \right) \cdot \left(\sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}(\mathbb{Y} = y) \right) \\ &= F_{\mathbb{X}}(t_1) \cdot F_{\mathbb{Y}}(t_2). \end{aligned}$$

Remarque

La réciproque est vraie mais plus délicate à prouver.



Théorème 20 – Lemme des coalitions :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires réelles et $f : \mathbb{X}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{Y}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes, alors $f(\mathbb{X})$ et $g(\mathbb{Y})$ sont aussi indépendantes.

Exemple : Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes, alors $\mathbb{X}^2$ et $\mathbb{Y}^3$ sont également indépendantes.

Ce théorème se généralise facilement à plus n variables aléatoires.

Théorème 21 – Lemme des coalitions :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

Soient $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des v.a.r. et $f_1 : \mathbb{X}_1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n : \mathbb{X}_n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions.

- T1** • Si $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f_1(\mathbb{X}_1), \dots, f_n(\mathbb{X}_n)$ sont mutuellement indépendantes.
- T2** • Si $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ sont discrètes et mutuellement indépendantes, alors toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_p$ est indépendante de toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $\mathbb{X}_{p+1}, \dots, \mathbb{X}_n$ (pour $p \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$).

Exemples 10 :

Soient $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_5$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :

- les v.a.r. $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2^2, 2\mathbb{X}_3, e^{\mathbb{X}_4} - 1$ et $|\mathbb{X}_5|$ sont mutuellement indépendantes.
- les v.a.r. $2\mathbb{X}_1\mathbb{X}_3 - \mathbb{X}_5$ et $\mathbb{X}_2^2$ sont indépendantes.
- les v.a.r. $\min(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ et $\max(\mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4, \mathbb{X}_5)$ sont indépendantes.

IV.2 – Cas discret

Dans le cas discret la [définition \(7\)](#) se simplifie aussi :

Définition 8 – Indépendance, cas discret :

- D1** • Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On dit que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont *indépendantes* si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \cdot \mathbf{P}([\mathbb{Y} = y]).$$

- D2** • Les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ sont *mutuellement indépendantes* si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}_1(\Omega) \times \dots \times \mathbb{X}_n(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [\mathbb{X}_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{X}_i = x_i]).$$

IV.3 – Lien avec l'espérance

Théorème 22 – Espérance d'un produit :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

On suppose que X et Y sont **indépendantes** et admettent chacune une espérance.

Alors la variable aléatoire XY admet une espérance et $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

Attention

La réciproque est fausse.

Remarque

Cela n'intéresse personne de savoir écrire $E(XY)$.

Exemple Si X et Y sont deux variable aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$ alors $E(XY) = p^2$.

IV.4 – Lien avec la variance

Théorème 23 – Variance d'une somme :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

On suppose que X et Y sont indépendantes et admettent chacune un moment d'ordre 2.

Alors la variable aléatoire $X + Y$ admet une variance et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Attention

La réciproque est fausse.

Remarque 4. Attention, la réciproque est fausse. Remarque 5. On s'en fiche si on ne sait pas définir $V(X + Y)$!

Remarque

Cela n'intéresse personne de savoir écrire $V(X + Y)$.

Exemple : Si X et Y sont deux variable aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$ alors $V(X + Y) = 2p(1 - p)$.