

CE QUE DIT LE PROGRAMME EN ECG2 :

1 – Couples de variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques. On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites (sans exiger la vérification de la convergence absolue des séries envisagées). On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega), Y(\Omega)$ et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$. On commencera par aborder des exemples où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.
Lois marginales, lois conditionnelles.	
Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y) .	On se limitera à des cas simples tels que $X + Y$, XY .
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y) de variables aléatoires.	$E(g(X, Y)) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y) P([X = x] \cap [Y = y])$ (sous réserve de convergence absolue). Résultat admis. En particulier : espérance de la somme, du produit de deux variables aléatoires discrètes.
Linéarité de l'espérance.	Résultat admis.
Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$.
Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Résultat admis.
Loi du minimum, du maximum, de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Covariance de deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.	Notation $\text{Cov}(X, Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbb{R}$, $\text{Cov}(X, a) = 0$.

Formule de Koenig-Huygens. Conséquence.	$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes et possèdent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle. Réciproque fausse.
Coefficient de corrélation linéaire. Propriétés.	Notation $\rho(X, Y)$. $ \rho(X, Y) \leq 1$. Cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.
Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes.	On pourra admettre ce résultat.
Cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	

a) Suites de variables aléatoires discrètes

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.	$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega),$ $P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n P([X_i = x_i]).$
Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires réelles discrètes.	
Lemme des coalitions.	Si $X_1, X_2, \dots, X_n$, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$. Résultat admis.
Espérance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes.	
Variance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	

CE QUE DISAIT LE PROGRAMME EN ECG1 :

PROBABILITÉS - VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Dans ce chapitre, on généralise l'étude faite au premier semestre ; le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.

L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme.

L'étude des variables aléatoires discrètes se fera dans la mesure du possible en tant qu'outil de modélisation de problèmes concrets.

2 – Espace probabilisé

On généralisera dans ce paragraphe l'étude effectuée lors du premier semestre sans soulever de difficultés théoriques.

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.	L'ensemble des événements contient Ω , est stable par union, par intersection dénombrable et par passage au complémentaire.
Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω .	
Généralisation de la notion de probabilité.	
Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω .	
Généralisation de la notion de probabilité conditionnelle.	
Généralisation de la formule des probabilités composées.	
Généralisation de la formule des probabilités totales.	
Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.	

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Définition d'une variable aléatoire réelle.	X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si X est une application de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout élément x de $\mathbf{R}$, $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$. Démontrer que X est une variable aléatoire ne fait pas partie des exigences du programme. Notations $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leq x]$, etc.
Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.	

1 – Variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

a) Variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$

Définition d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$.	L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.	
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X . Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limite à des cas simples, tels que $g : x \mapsto ax + b$, $g : x \mapsto x^2, \dots$

b) Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition de l'espérance.	Quand $X(\Omega)$ est infini, une variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente. Notation $E(X)$.
Linéarité de l'espérance. Positivité.	Résultats admis.
Variables aléatoires centrées.	

Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .	Quand $X(\Omega)$ est infini, $E(g(X))$ existe si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ converge absolument, et dans ce cas $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
$E(aX + b) = aE(X) + b$.	
Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète	Notations $V(X)$, $\sigma(X)$. discrète.
Formule de Kœnig-Huygens.	$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
$V(aX + b) = a^2 V(X)$.	
Variables aléatoires centrées réduites.	On notera X^* la variable aléatoire centrée réduite associée à X .

2 – Lois usuelles

a) Lois discrètes finies

Loi certaine.	Caractérisation par la variance.
Loi de Bernoulli. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
Loi binomiale. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
Application : formule du binôme de Newton donnant $(a + b)^n$.	Lorsque a et b sont strictement positifs, lien avec $\mathcal{B}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$. La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.
Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Espérance, variance.	Application à l'étude de la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$, où $(a, b) \in \mathbf{N}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

b) Lois discrètes infinies

Loi géométrique (rang d'apparition du premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. » Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.
Loi de Poisson. Espérance, variance Contexte d'utilisation.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On pourra remarquer que la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est loi « limite » (cette notion sera précisée en deuxième année) d'une suite de variables suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.