

Remédiation 8

Suites récurrentes -- Dans le cas où f est croissante.

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur $[0; 1]$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement définie et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donner sa limite.

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. $\forall x \in [0; 1], \frac{1+x}{2} > 0$. d'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, f est dérivables sur $[0; 1]$ et on a :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} > 0.$$

La fonction f est donc (strictement) croissante sur $[0; 1]$.

2. Commentaires : *DEUX choses à dire : u_0 dans $[0; 1]$ et $[0; 1]$ stable :*

D'après la question précédente, f est croissante sur $[0; 1]$ donc

$$f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = \left[\sqrt{\frac{1}{2}}; 1 \right] \subset [0; 1].$$

L'intervalle $[0; 1]$ est donc stable par f .

Comme $u_0 = \frac{1}{2} \in [0; 1]$, c'est le cas de tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$.

Commentaires : *Dans le doute, on peut aussi le montrer rapidement par récurrence :*

Initialisation : $u_0 \in [0; 1]$ d'après l'énoncé donc l'initialisation.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$.

Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme $u_n \in [0; 1]$ stable par f alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0; 1]$ et l'hérédité.

Synthèse : Vraie pour $n = 0$ et héréditaire, la propriété « $u_n \in [0; 1]$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1].$$

3. D'après les questions précédentes, f est croissante donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée est monotone.

$$\text{Or, } u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, $u_0 < u_1$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4. D'après les questions précédentes, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 1) donc elle converge vers un réel $\ell \leq 1$ par le théorème de convergence monotone.

💡 Idée

Il est beaucoup mieux de voir que f est la composée de deux fonctions croissantes donc croissantes aussi.

⚠ Attention

On n'oublie pas la continuité de f !

Comme f est continue sur $[0; 1]$ car dérivable, ℓ est un point fixe de f .

On résout l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \\ \frac{1+x}{2} &= x^2 \\ 1+x &= 2x^2 \\ 2x^2 - x - 1 &= 0 \\ 2(x-1) \left(x + \frac{1}{2}\right) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme $-\frac{1}{2} \notin [0; 1]$, la limite ℓ ne peut être que 1.

Conclusion, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.