

1. Questions de cours : On considère une suite de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{où } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction donnée.}$$

a. Qu'appelle-t-on intervalle stable par f .

Tout intervalle I inclus dans le domaine de définition de f et vérifiant $f(I) \subset I$.

b. Si la fonction f est croissante sur un intervalle stable I que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et monotone. Sa monotonie est donnée par l'ordre de ses premiers termes.

c. Qu'appelle-t-on un point fixe de la fonction f ?

Tout réel x du domaine de définition de f vérifiant $f(x) = x$.

d. Si une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une limite $\ell \in I$. Que peut-on dire de ℓ et sous quelle condition ?

Si f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe de f .

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$.

a. Montrer que $[0 ; 1]$ est stable par f .

b. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

c. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .

d. Déterminer ℓ .

Posons $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ et $\delta(x) = f(x) - x$.

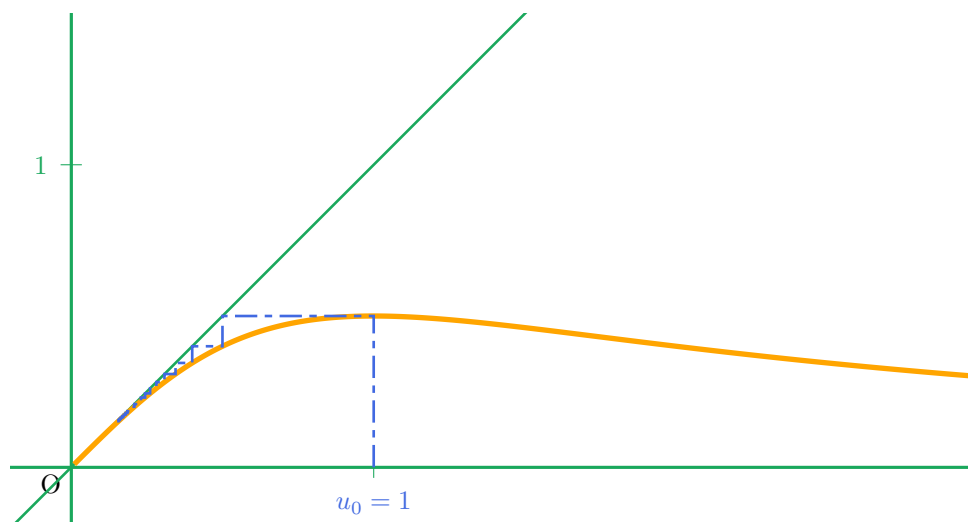
a. $\forall x \in [0 ; 1], 0 \leq \frac{x}{1+x^2} \leq x \leq 1$ donc $[0 ; 1]$ est stable par f et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{1+x^2} \leq x \implies \delta(x) \leq 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

c. Décroissante et minorée par 0, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.

d. Comme f est continue sur $[0 ; 1]$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f . Il n'y en a qu'un dans $[0 ; 1]$, c'est 0.

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.



3. Compléter la fonction **Python** ci-dessous pour qu'elle prenne en argument un entier n et qu'elle renvoie la valeur de u_n .

```
1 def suite(n):  
2     u=1  
3     for k in range (1,n+1):  
4         u= u/(u**2+1)  
5     return u
```