

Khôlles 3

Suites récurrentes & Espaces vectoriels

1. QUESTIONS DE COURS (AU CHOIX DE L'INTERROGATEUR)

Espaces vectoriels, Bases, Dimension et Rang

1. Sous-espaces vectoriels engendrés

— Définir $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et énoncer le théorème fondamental sur la nature de cet ensemble.

2. Familles libres, génératrices et bases

— Définir une famille génératrice, une famille libre et une base de E .

3. Dimension finie

— Soit E un espace de dimension $n \geq 1$. Énoncer les corollaires sur les familles libres ou génératrices à n éléments.

4. Inversibilité des matrices

— Énoncer les caractérisations équivalentes de l'inversibilité d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'aide du système $AX = 0_{n,1}$ et de la famille de ses colonnes.

Stabilité, Définition et Points Fixes

5. Intervalle stable et existence de la suite :

- Donner la définition d'un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par une fonction f .
- Énoncer la propriété garantissant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

6. Notion de point fixe et convergence :

- Définir la notion de point fixe d'une application f sur un intervalle I .
- Énoncer et démontrer la proposition fondamentale : si f est continue sur I et si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$, alors l est un point fixe de f ($f(l) = l$).

Monotonie, Variations & Comportement Dynamique

7. Lien avec la monotonie de f :

- Énoncer le théorème établissant la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque f est **croissante** sur I (selon le signe de $f(u_0) - u_0$).
- (**khûbe**) Expliquer le comportement des sous-suites d'indices pairs $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et impairs $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque la fonction f est **décroissante** sur I (définition et rôle de $g = f \circ f$).

Inégalité des Accroissements Finis (IAF) & Vitesse de Convergence

8. Application de l'IAF aux suites récurrentes :

- Énoncer le théorème de l'Inégalité des Accroissements Finis.
- (**khûbe**) Énoncer et démontrer par récurrence la majoration de l'erreur : si I est un intervalle stable sur lequel $|f'| \leq M$ avec $M \in [0, 1[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq M^n |u_0 - l|$. En déduire la convergence de la suite par encadrement.

color primaryblue

2. EXERCICES TYPES & SAVOIR-FAIRE ATTENDUS

1. Étude classique avec fonction croissante :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

- Montrer que $[0, 2]$ est un intervalle stable par $f : x \mapsto \sqrt{x + 1}$.
- Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Démontrer que la suite converge et déterminer sa limite $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

2. Cas arithmético-géométrique (Application directe du cours) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

- Déterminer le point fixe de $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
- Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide des variations de f et du signe de $u_1 - u_0$.
- Montrer que la suite converge vers son point fixe.

3. Suite avec racine carrée (Théorème de convergence monotone) :

Soit $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ sur $[0, +\infty[$ et la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes sur $[0, +\infty[$.
- Montrer que l'intervalle $I = [0, 3]$ est stable par f .
- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
- En déduire que la suite converge et calculer sa limite.

4. Suite linéaire / rationnelle simple :

Soit $f(x) = \frac{x+1}{4}$ sur $[0, 1]$ et la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrer que $[0, 1]$ est stable par f et déterminer l'unique point fixe α de f .
- Calculer u_1 , puis justifier la décroissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide des variations de f .
- Démontrer la convergence de la suite et déterminer sa limite.

5. (khûbe) Application de l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF) :

Soit $f(x) = \frac{1}{2} \cos(x) + 1$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrer que $I = [0, 2]$ est stable par f .
- Montrer qu'il existe un unique point fixe $\alpha \in I$.
- Montrer que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et en déduire que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
- Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ et conclure quant à la convergence.

6. (khûbe) Étude d'une fonction décroissante et sous-suites pairs/impairs :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

- Étudier la fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$ sur $[0, 1]$ et expliciter $g = f \circ f$.
- Étudier la monotonie des suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- Déterminer les points fixes de g et étudier la convergence de la suite mère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

7. Étude d'une suite polynomiale et points fixes :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

- Montrer que $[0, 1]$ est stable par $f : x \mapsto x - x^2$.
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, puis déterminer sa limite.
- Étudier le comportement et la divergence de la suite si $a < 0$.

8. Savoir-faire informatique (Python) :

- Écrire une fonction **Python** `suite\_u(n, u0)` renvoyant le n -ième terme d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Écrire une fonction **Python** utilisant une boucle **while** pour déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - l| \leq 10^{-4}$ (ou $u_n \geq 10^4$ en cas de divergence).

9. IAF directe sur une exponentielle :

Soit $f(x) = \frac{1}{3}e^{-x}$ sur $[0, 1]$ et $u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Vérifier que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.
- Montrer que $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.
- En admettant l'existence d'un unique point fixe $\alpha \in [0, 1]$, établir que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
- En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.