

Sujet 1

Suites récurrentes & Espaces vectoriels

Question de cours :

Énoncer le théorème établissant la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de celle de f .

Exercice 1 :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Montrer que $[0, 2]$ est un intervalle stable par $f : x \mapsto \sqrt{x + 1}$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Démontrer que la suite converge et déterminer sa limite $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2 – Base adaptée d'un sous-espace :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$F = \text{Vect}((1, 2, 1), (0, 1, 1)).$$

1. Montrer que les deux vecteurs forment une base de F .
2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les coordonnées de

$$x = (3, 5, 4)$$

dans cette nouvelle base.

Exercice 3 :

Déterminer la nature des deux séries suivantes.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Sujet 2**Suites récurrentes & Espaces vectoriels****Question de cours :**

Donner la définition d'un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par une fonction f .

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

1. Déterminer le point fixe de $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide des variations de f et du signe de $u_1 - u_0$.
3. Montrer que la suite converge vers son point fixe.

Exercice 2 – Famille génératrice ou base ? :

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère

$$u_1 = (1, 0, 0, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1, 0), \quad u_3 = (1, 1, 1, 1), \quad u_4 = (2, 1, 1, 2).$$

1. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?
2. Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
3. Extraire une base de cette famille.
4. Donner les coordonnées de u_4 dans cette base.

Exercice 3 :

Déterminer la nature des deux séries suivantes.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+5}{n^2+n}.$

Sujet 3**Suites récurrentes & Espaces vectoriels****Question de cours :**

Énoncer la propriété garantissant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

Exercice 1 :

Soit $f(x) = \sqrt{2x+3}$ sur $[0, +\infty[$ et la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que l'intervalle $I = [0, 3]$ est stable par f .
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
4. En déduire que la suite converge et calculer sa limite.

Exercice 2 – Coordonnées dans une base de polynômes :

On considère

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2 + 1, X^3 - X).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de

$$P(X) = 2X^3 - X^2 + 3X + 5$$

dans cette base.

3. Déterminer le polynôme dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont

$$(2, -1, 3, 1).$$

Exercice 3 :

Déterminer la nature des deux séries suivantes.

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}.$$

Sujet 4

Suites récurrentes & Espaces vectoriels

Question de cours :

Définir la notion de point fixe d'une application f sur un intervalle I . À quelle condition une suite récurrente converge-t-elle vers un point fixe ?

Exercice 1 :

Soit $f(x) = \frac{x+1}{4}$ sur $[0, 1]$ et la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $[0, 1]$ est stable par f et déterminer l'unique point fixe α de f .
2. Calculer u_1 , puis justifier la décroissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide des variations de f .
3. Démontrer la convergence de la suite et déterminer sa limite.

Exercice 2 – Sous-espace de $\mathbb{R}^4$:

On considère

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0, x - t = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F .
3. Donner la dimension de F .
4. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3 :

Déterminer la nature des deux séries suivantes.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right).$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^3}.$

Sujet 5

Suites récurrentes & Espaces vectoriels

Question de cours :

Définir une famille génératrice, une famille libre et une base de E .

Exercice 1 :

Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}$.

Justifier l'existence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Qu'en déduire pour l'étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction :

Soit $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+2x}$. f est strictement décroissante sur $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$.

En posant $I = \mathbb{R}_+^*$, on a $f(I) = \left] \frac{1}{2}, 1 \right[\subset I$.

Par conséquent la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et même $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

La fonction f étant décroissante sur I , les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

Comme elles sont bornées, elles convergent vers un point fixe de $f \circ f$ continue.

$f \circ f(x) = x \iff \frac{2+3x}{3+4x} = x \iff 4x^2 = 2$. Le seul point fixe de $f \circ f$ dans I est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 – Base et coordonnées dans $\mathbb{R}^3$:

On considère les vecteurs

$$u = (1, 1, 0), \quad v = (1, 0, 1), \quad w = (0, 1, 1).$$

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur

$$t = (2, 5, 4)$$

dans cette base.

3. Déterminer tous les vecteurs dont les coordonnées dans cette base vérifient

$$x + y + z = 0.$$

Exercice 3 :

Déterminer la nature des deux séries suivantes.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n}.$

Sujet 6

Suites récurrentes & Espaces vectoriels

Question de cours :

Énoncer le lien entre la continuité d'une fonction et la limite d'une suite récurrente associée.

Exercice 1 :

Soit $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction :

Soit $f : x \mapsto \ln(1 + x)$. $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. La suite est correctement définie et à valeurs positives.

$\forall x \geq 0, f(x) \leq x$. La suite est donc décroissante. Étant positive, elle est convergente. f est continue et admet un seul point fixe : 0.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 2 :

1. Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & b & a-b \\ a+b & b & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un espace vectoriel réel.

2. Déterminer la dimension de E .

Exercice 3 :

Déterminer la nature des deux séries suivantes.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{2n+1}$.

Sujet 7

Suites récurrentes & Espaces vectoriels

Question de cours :

Énoncer le théorème de l'Inégalité des Accroissements Finis.

Exercice 1 :

On définit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+3}$ admet un, et un seul point fixe α .
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ est une suite de référence.
3. En déduire l'expression explicite de v_n , puis de u_n .
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2 :

1. Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ a & c & a+c \\ a & a-b & a-c \end{pmatrix} \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un espace vectoriel réel.
2. Déterminer la dimension de E .

Exercice 3 :

Déterminer la nature des deux séries suivantes.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n}$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 3}$.

Sujet 8

Suites récurrentes & Espaces vectoriels

Question de cours :

Soit E un espace de dimension $n \geq 1$. Énoncer les corollaires sur les familles libres ou génératrices à n éléments.

Exercice 1 :

Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction :

Soit $f : x \mapsto x e^{-x}$. $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. La suite est correctement définie et à valeurs positives.

$\forall x \geq 0, f(x) \leq x$. La suite est donc décroissante. Étant positive, elle est convergente. f est continue et admet un seul point fixe : 0.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 2 :

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $E = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X \right\}$ est un espace vectoriel réel.
2. Déterminer la dimension de E .

Exercice 3 :

Déterminer la nature des deux séries suivantes.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 2}{n^5 - 1}$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$.