

DM 4

Étude d'une suite définie par récurrence

Exercice 1 – (Extrait de EML 2023) :

Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, on définit

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

pour tout entier naturel n .

1. a. Étudier les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

On dressera son tableau de variations en précisant les limites.

- b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. Informatique.

- a. Compléter la fonction **Python** suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```

1  def fonc_1(a):
2      from numpy import exp
3      u = 1
4      n = 0
5      while ..... :
6          u = exp(-u)/u
7          n = .....
8      return n

```

- b. On considère maintenant la fonction suivante.

```

1  def fonc_2(a):
2      from numpy import exp
3      u = 1
4      n = 0
5      while u < a:
6          u = exp(-u)/u
7          n = n + 1
8      return n

```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` renvoient respectivement 6 et 5.

En déduire un encadrement de u_5 et u_6 .

Commenter ce résultat en une ligne.

- c. Écrire une fonction **Python** prenant un entier n en argument et renvoyant u_n .

3. Pour tout réel $x \in [0; +\infty]$, on pose

$$g(x) = e^{-x} - x^2.$$

- a. Montrer que g réalise une bijection de $[0; +\infty]$ sur $] -\infty; 1]$.
- b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0; +\infty[$, notée α .
4.
 - a. Montrer que $u_2 > u_0$.
 - b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Pour tout réel strictement positif, on pose $h = f \circ f$ et on complète par $h(0) = 0$.
 - a. Déterminer une expression explicite de $h(x)$.
 - b. Montrer que h est continue sur $[0; +\infty]$.
 - c. Montrer que l'équation $h(x) = x$ possède exactement deux solutions sur $[0; +\infty]$.
 - d. En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Converge-t-elle ?