

IV

Rappels d'ECG-1 Lois usuelles

Plan du chapitre

I LOIS FINIES USUELLES	2
I.1 LOI CERTAINE	2
I.2 LOI DE BERNOULLI	3
I.3 LOI BINOMIALE	5
I.4 LOI UNIFORME	8
II LOIS INFINIES USUELLES	11
II.1 LOI GÉOMÉTRIQUE	11
II.2 LOI DE POISSON	15
INDEX	20

Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ discrète revient à la donnée de :

- $\mathbb{X}(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
- Pour chaque $k \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$.

Dans chacun des cas, on précisera la loi, une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons, des exemples concrets d'application.

De plus, on distinguera bien

- les cas finis : loi certaine, loi uniforme discrète, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- les cas infinis dénombrables : loi géométrique, loi de Poisson.

I. LOIS FINIES USUELLES

I.1 – Loi certaine

Définition 1 – Loi certaine :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi certaine s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$X(\Omega) = \{m\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X = m]) = 1.$$

On dira aussi que la variable aléatoire X est certaine, égale à m . On parle aussi de variable aléatoire constante, ou de variable déterministe.

Exemple de modélisation : On considère une expérience qui possède une ou plusieurs issues différentes dont une issue se produit avec probabilité 1.

Alors la variable X égale à m si l'issue particulière se produit suit une loi quasi-certaine.

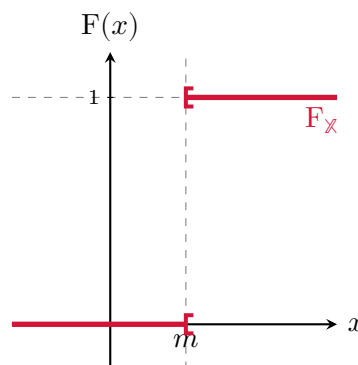
Exemple 1 – Exemple de modélisation :

On considère des lancers successifs d'un dé à 6 faces non pipé.

On note X la variable aléatoire correspondant à la somme des numéros obtenus sur la face visible du dé et sur sa face opposée.

Alors X est une variable aléatoire certaine égale à 7.

Fonction de répartition : X suit la loi certaine telle que $\mathbf{P}([X = m]) = 1$ pour $m \in \mathbb{R}$.



Proposition 1 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète finie suivant une loi certaine (ou quasi-certaine). Il existe donc $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{P}([X = m]) = 1$.

Alors :

1. Alors X admet une espérance et une variance.
2. De plus,

$$\mathbf{E}(X) = m \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = 0.$$

 Preuve :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.
2. De plus, on a $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) = m \mathbf{P}([\mathbb{X} = m]) = m \times 1 = m$.

Et, pour le moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbb{X}) &= \mathbf{E}((\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))^2) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} (x - m)^2 \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \\ &= (m - m)^2 \mathbf{P}([\mathbb{X} = m]) = 0. \end{aligned}$$



I.2 – Loi de Bernoulli

Définition 2 – Loi de Bernoulli :

Soit $p \in [0; 1]$.

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une *loi de Bernoulli*, noté $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si

$$\mathbb{X}(\Omega) = \{0; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = p, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = 1 - p.$$

Remarque

Une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1$ ou $p = 0$ est une variable quasi-certaine.

Exemple de modélisation : Toute expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles peut être appelée expérience de Bernoulli.

L'une des issues est appelée « succès », l'autre « échec ». Le paramètre p correspond à la probabilité de succès, $1 - p$ celle de l'échec.

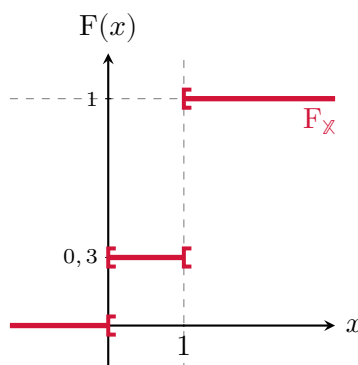
À retenir

Pour $A \in \mathcal{A}$ alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.

Exemples 2 – Exemples de modélisation :

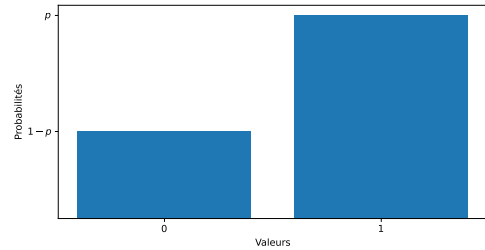
- Le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée (1 pour pile, 0 face) suit une loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Plus généralement, la variable aléatoire associée à une expérience aléatoire ayant seulement deux issues (0 pour échec, 1 pour succès) suit une loi $\mathcal{B}(p)$ où p est la probabilité de succès.

Fonction de répartition : $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(0.7)$.



Représentation de $\mathcal{B}(p)$:

Ci-contre, le diagramme en bâtons associé à une loi de Bernoulli de paramètre p .



Et le code en **Python** :

```

1  import matplotlib.pyplot as plt
2
3  # Données
4  val = [0,1]
5  loi = [.3,.7]
6
7  # Création de la figure
8  fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,4))
9
10 # Diagramme en bâtons
11 ax.bar(val, loi)
12
13 # Graduations personnalisées
14 ticks = [.3,.7]
15
16 ax.set_xticks(val)
17 ax.set_xticklabels([r"$0$", r"$1$"])
18
19 ax.set_yticks(ticks)
20
21 ax.set_yticklabels([
22     r"$1-p$",
23     r"$p$",
24 ])
25
26 # Titres
27 ax.set_xlabel("Valeurs")
28 ax.set_ylabel("Probabilités")
29
30 # Affichage
31 plt.show()

```

Proposition 2 :

Soit $\mathbb{X} \longleftrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Alors :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.
2. De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = p(1 - p).$$

 Preuve :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.
2. De plus, on a

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 1 \times \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) + 0 \times \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = p.$$

Pour le moment d'ordre 2 :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = 1^2 \times \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) + 0^2 \times \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = p.$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

**I.3 – Loi binomiale****Définition 3 – Loi binomiale :**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la *loi binomiale* de paramètres n et p , noté $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si

$$\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

i Remarque

$$\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p).$$

Exemple de modélisation : Toute expérience consistant à effectuer n épreuves de Bernoulli identiques *i.e.* de même paramètre p et indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres).

Alors la variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n, p) .

Exemple 3 – Exemple de modélisation :

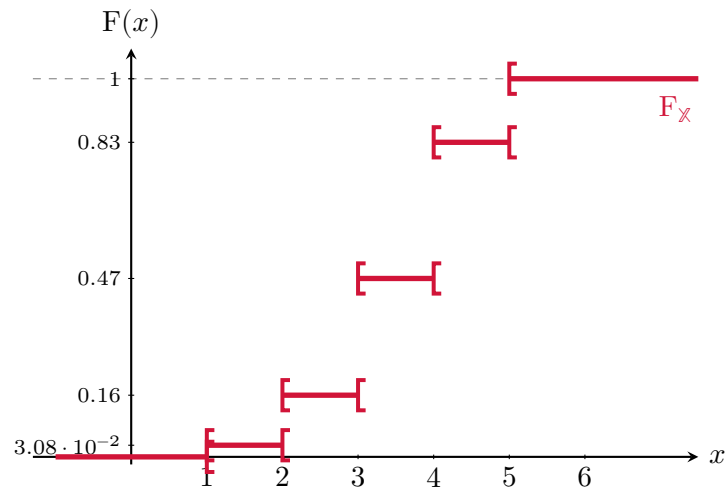
On lance successivement 10 fois un dé équilibré et on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant au nombre de six obtenus.

$$\text{Alors } \mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{6}\right).$$

⚠ Attention

Ne pas oublier la condition de mutuelle indépendance.

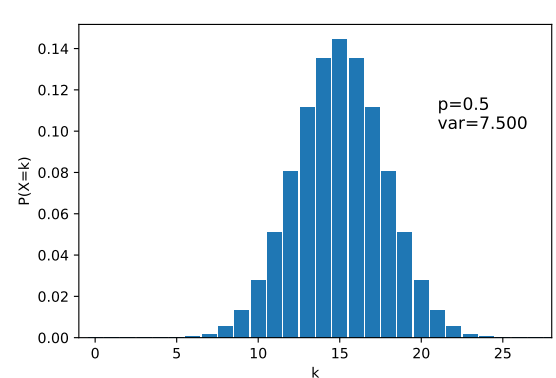
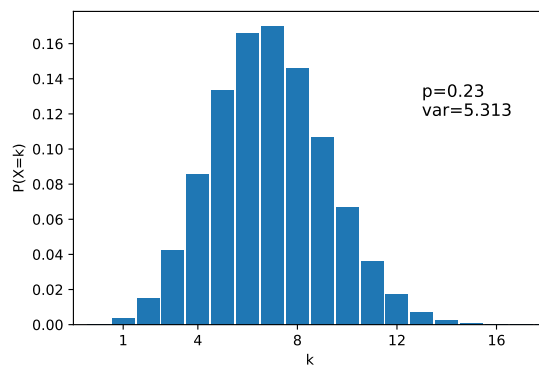
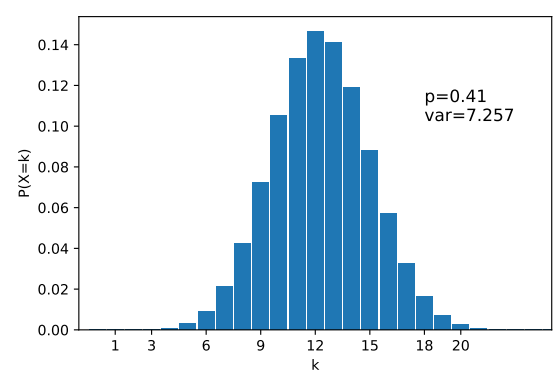
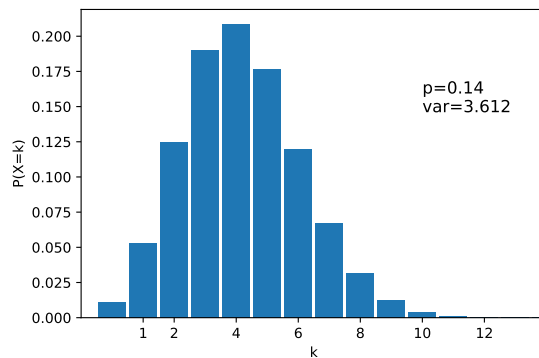
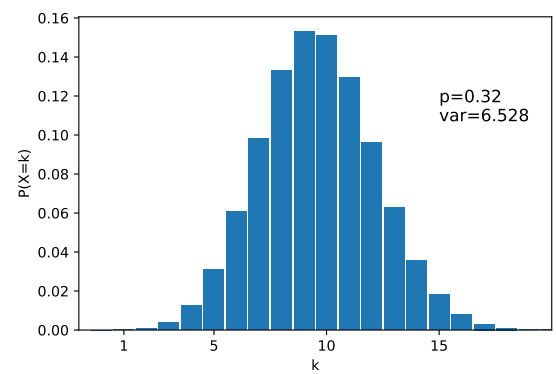
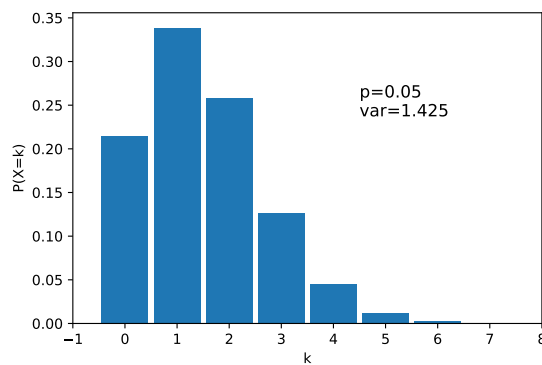
Fonction de répartition : $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0, 7)$.



Représentation de $\mathcal{B}(n; p)$:

Donnons quelques diagrammes en bâtons associés aux lois $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 30$ et

$$p \in \{0,05; 0,14; 0,23; 0,32; 0,41; 0,5\}.$$



Avec le code en `Python` :

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import math
3
4 # Paramètres
5 n = ...
6 p = ...
7
8 # Loi binomiale
9 val = list(range(n+1))
10 loi = [math.comb(n,k)*(p**k)*((1-p)**(n-k)) for k in val]
11
12 # Création figure
13 fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,4))
14
15 # Histogramme discret
16 ax.bar(val, loi, width=0.9)
17
18 # Axes
19 ax.set_xlabel("k")
20 ax.set_ylabel("P(X=k)")
21
22 # Annotation
23 var = n*p*(1-p)
24 ax.text(0.15*n, max(loi)*0.7,
25        f"p={p}\nvar={var:.3f}",
26        fontsize=12)
27
28 # Limites pour un rendu propre
29 ax.set_xlim(-1, n-22)
30
31 # Affichage
32 plt.show()

```

Proposition 3 :

Soient $n \geq 1$, $p \in [0; 1]$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Alors :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.
2. De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = np(1 - p).$$

Preuve :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.

Rappel $\forall n \geq k \geq 1,$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

2. — Calculons $\mathbf{E}(\mathbb{X})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{X}) &= \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-(j+1)} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} \\ &= np \end{aligned}$$

— Calculons $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \sum_{k=1}^n k \times k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n nk \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-(j+1)} \\ &= np \left(\sum_{j=0}^{n-1} j \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} \right) \\ &= np((n-1)p + 1) = np(np + 1 - p) \\ &= n^2 p^2 + np(1-p) \end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit que

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2 = n^2 p^2 + np(1-p) - (np)^2 = np(1-p).$$

**I.4 – Loi uniforme****Définition 4 – Loi discrète uniforme :****D1** • Soit $n \geq 1$.On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une *loi discrète uniforme* sur $\llbracket 1; n \rrbracket$, noté $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, si

$$\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \frac{1}{n}.$$

D2 • Plus généralement, pour tous entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$.On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une *loi discrète uniforme* sur $\llbracket a; b \rrbracket$, noté $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$, si

$$\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket a; b \rrbracket, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \frac{1}{b-a+1}.$$

Attention

$$\text{card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b - a + 1.$$

Remarque : Si $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ avec $n = b - a + 1$, alors

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X} + a - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket).$$

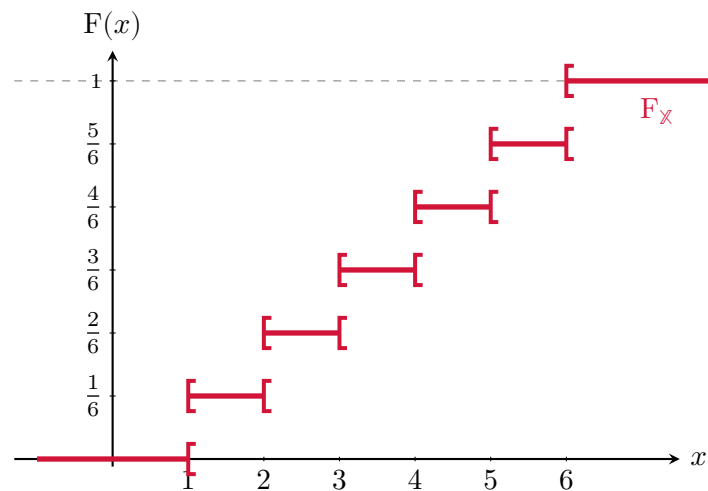
Exemple de modélisation : Toute expérience possédant n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.

Alors la variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience suit une loi uniforme sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Exemples 4 – Exemples de modélisation :

- La variable aléatoire X correspondant au résultat d'un lancer de dé équilibré suit la loi uniforme sur $\llbracket 1 ; 6 \rrbracket$.
- La loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ correspond à la loi uniforme sur $\llbracket 0 ; 1 \rrbracket$.
- Une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n . On tire au hasard une boule. Le numéro obtenu suit une loi uniforme sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

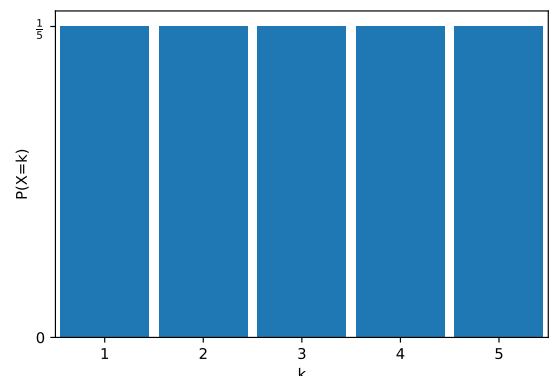
Fonction de répartition : $X \mapsto \mathcal{U}(\llbracket 1 ; 6 \rrbracket)$.



Représentation de $\mathcal{U}(\llbracket a ; b \rrbracket)$:

Ci-contre le diagramme en bâtons de la loi :

$\mathcal{U}(\llbracket 1 ; 5 \rrbracket)$.



Avec le code en **Python** :

```

Éditeur 1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 # Support de la loi uniforme

```

```

4  val = [1, 2, 3, 4, 5]
5
6  # Loi uniforme discrète sur {1,...,5}
7  loi = [1/5 for _ in val]
8
9  # Création figure
10 fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,4))
11
12 # Histogramme discret
13 ax.bar(val, loi, width=0.9)
14
15 # Axes
16 ax.set_xlabel("k")
17 ax.set_ylabel("P(X=k)")
18
19 # Limites pour un rendu propre
20 ax.set_xlim(0.5, 5.5)
21
22 ax.set_yticks([0, 1/5])
23 ax.set_yticklabels(["0", r"$\frac{1}{5}$"])
24
25 # Affichage
26 plt.show()

```

Proposition 4 :

Soient $n \geq 1$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}([1; n])$.

Alors :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.
2. De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Preuve :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.
2. — Calculons $\mathbf{E}(\mathbb{X})$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbb{X}) &= \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n+1}{2}.
 \end{aligned}$$

— Calculons $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2)$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit que

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{(n+1)(2(2n+1) - 3(n+1))}{12} \\
 &= \frac{(n+1)(n-1)}{12} \\
 &= \frac{n^2 - 1}{12}
 \end{aligned}$$



II. LOIS INFINIES USUELLES

II.1 – Loi géométrique

Définition 5 – Loi géométrique :

Soient $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$.

On dit que la variable aléatoire X suit la *loi géométrique* de paramètre p , notée $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P([X = k]) = (1 - p)^{k-1}p = q^{k-1}p.$$

Exemple de modélisation : Toute expérience aléatoire consistant en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli identiques (même paramètre) et indépendantes

Alors la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p .

En effet, posons :

- P_i : « obtenir un succès au $i^{\text{ème}}$ lancer »,
- F_i : « obtenir un échec au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

Alors $[X = k] = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$.

Les lancers étant indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned}
 P([X = k]) &= P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\
 &= P(F_1) \times P(F_2) \times \dots \times P(F_{k-1}) \times P(P_k) \\
 &= q^{k-1}p.
 \end{aligned}$$

Exemples 5 – Exemples de modélisation :

- Une loi géométrique modélise un premier temps d'arrêt.

Si X renvoie le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli identiques, mutuellement indépendantes, alors X suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.

i Remarque
La loi est bien définie puisque les probabilités des événements sont positives et, à partir des résultats sur les séries géométriques :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} p \cdot q^{k-1} &= p \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\
 &= \frac{p}{1-q} = 1.
 \end{aligned}$$

- On lance successivement un dé équilibrée jusqu'à obtenir un six. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro du premier lancer tombé sur six.

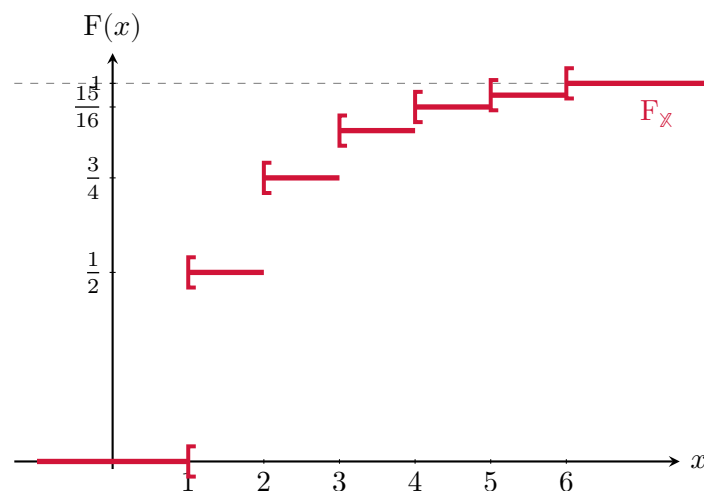
Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

- On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. L'expérience consiste au tirage infini d'une boule avec remise.

On note X la variable aléatoire . donnant le rang d'apparition de la première boule rouge.

Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{r}{r+v}\right)$.

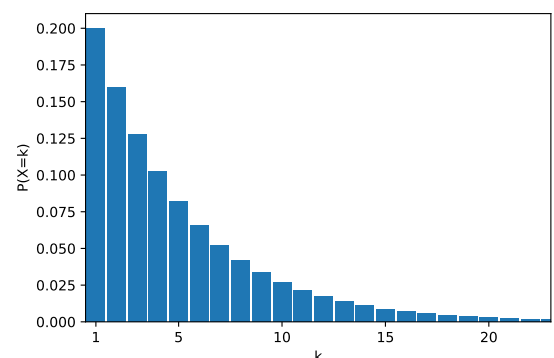
Fonction de répartition : $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.



Représentation de $\mathcal{G}(p)$:

Ci-contre le diagramme en bâtons de la loi :

$$\mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right).$$



Et le code en **Python** :

```
Éditeur 1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 # Paramètre
```

```

4  p = ...
5
6  # Support de la loi géométrique
7  val = list(range(1,25))
8
9  # Loi géométrique
10 loi = [p*(1-p)**(k-1) for k in val]
11
12 # Création figure
13 fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,4))
14
15 # Histogramme discret
16 ax.bar(val, loi, width=0.9)
17
18 # Axes
19 ax.set_xlabel("k")
20 ax.set_ylabel("P(X=k)")
21
22 # Graduations entières
23 ax.set_xticks([1,5,10,15,20])
24
25 # Limites pour un rendu propre
26 ax.set_xlim(0.5, 23)
27
28 # Affichage
29 plt.show()

```

Proposition 5 :

Soient $p \in]0; 1[$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Alors :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.
2. De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Preuve :

Espérance : $\mathbb{X}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 1} k \mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \sum_{k=1}^n k(1-p)^{k-1}p = p \sum_{k=1}^n k(1-p)^{k-1}.$$

Or la série géométrique dérivée $\sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1}$ de raison $1-p \in]-1; 1[$ est convergente.

Donc $\mathbb{X}$ admet une espérance. De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

Variance : La variable aléatoire $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum_{k \geq 1} k^2 \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.

Il suffit de se rappeler que $\forall k \in \mathbb{N}$, on peut écrire $k^2 = k(k-1) + k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) &= \sum_{k=1}^n k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^n kp(1-p)^{k-1} \quad (\text{car } k^2 = k(k-1) + k) \\ &= p(1-p) \sum_{k=1}^n k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^n k(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p) \sum_{k=2}^n k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^n k(1-p)^{k-1} \quad (\text{car } 1(1-1)(1-p)^{1-2} = 0). \end{aligned}$$

Or, la série géométrique dérivée $\sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1}$ et la série géométrique dérivée deuxième $\sum_{k \geq 2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$, toutes deux de raison $1-p \in]-1; 1[$ sont convergentes.

Donc $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre *i.e.* une variance.

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) &= p(1-p) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} + p \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\ &= 2 \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} \\ &= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit :

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}.$$



La loi géométrique est aussi caractéristique des *lois sans mémoire*. C'est le propos de la **proposition (6)** :

Proposition 6 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle discrète infinie telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0; 1[$.

Alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

1. $\mathbf{P}(\mathbb{X} > k) = q^k$, où $q = 1 - p$.
2. $\mathbf{P}(\mathbb{X} > k + \ell) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > k) \times \mathbf{P}(\mathbb{X} > \ell)$.

 **Preuve :** Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$.

1. On remarque tout d'abord que

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} > k) = 1 - \mathbf{P}(\overline{[\mathbb{X} > k]}) = 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq k]).$$

$$\text{Par ailleurs, } [\mathbb{X} \leq k] = \bigcup_{i=1}^k [\mathbb{X} = i]$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq k]) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^k [\mathbb{X} = i]\right) = \sum_{i=1}^k \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \sum_{i=1}^k p q^{i-1} = p \sum_{i=0}^{k-1} q^i = p \frac{1 - q^k}{1 - q} \\ &= 1 - q^k \end{aligned}$$

Enfin, $\mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) = 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq k]) = 1 - (1 - q^k) = q^k$.

2. D'après le point précédent :

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} > k + \ell]) = q^{k+\ell} = q^k \times q^\ell = \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) \times \mathbf{P}([\mathbb{X} > \ell]).$$



Corollaire 7 – Loi sans mémoire :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle discrète infinie telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0; 1[$.

Alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X} > k]}([\mathbb{X} > k + \ell]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > \ell]).$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $\mathbb{X} > k$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est sans mémoire.

Preuve : Comme $[\mathbb{X} > k + \ell] \subseteq [\mathbb{X} > k]$, on a :

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X} > k]}([\mathbb{X} > k + \ell]) = \frac{\mathbf{P}([\mathbb{X} > k + \ell])}{\mathbf{P}([\mathbb{X} > k])} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbf{P}([\mathbb{X} > \ell]).$$



II.2 – Loi de Poisson

Définition 6 – Loi de Poisson^[1] :

Soit λ un réel strictement positif.

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit la *loi de Poisson* de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exemple de modélisation : Toute expérience aléatoire simulant l'occurrence d'un événement rare au sein d'une très grande population ou dont la probabilité d'apparition sur un intervalle de temps T ne dépend que de la durée de cet intervalle.

Plus précisément : On considère $(\mathbb{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{X}_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$.

[1]. **Siméon Denis Poisson** (1781-1840)

« La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques »

Remarque

La loi est bien définie. Les probabilités sont bien positives et à partir de la série exponentielle

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = 1. \end{aligned}$$

Attention

Ce n'est pas une loi sans mémoire.

On a alors, pour tout $k \leq n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbb{X}_n = k) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \mathbf{P}([X = k]) \end{aligned}$$

où $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire réelle . telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Exemple 6 – Exemple de modélisation :

- Si on regarde la probabilité qu'une ampoule donnée grille entre 14h et 15h aujourd'hui, cette probabilité est presque nulle.

Mais si on compte, à Paris, le nombre de d'ampoules qui ont grillé entre 14h et 15h aujourd'hui, on peut simuler ce nombre par une loi de Poisson.

- On considère une autoroute pour laquelle il y a en moyenne 1,8 accidents par semaine.

La variable aléatoire comptant le nombre d'accidents par semaine sur cette autoroute suit une $\mathcal{P}(1,8)$.

- On considère un livre contenant des fautes d'impression. On sait de plus qu'il y a en moyenne 0,8 faute d'impression par page.

La variable aléatoire comptant le nombre de fautes d'impression sur une page de ce livre suit $\mathcal{P}(0,8)$.

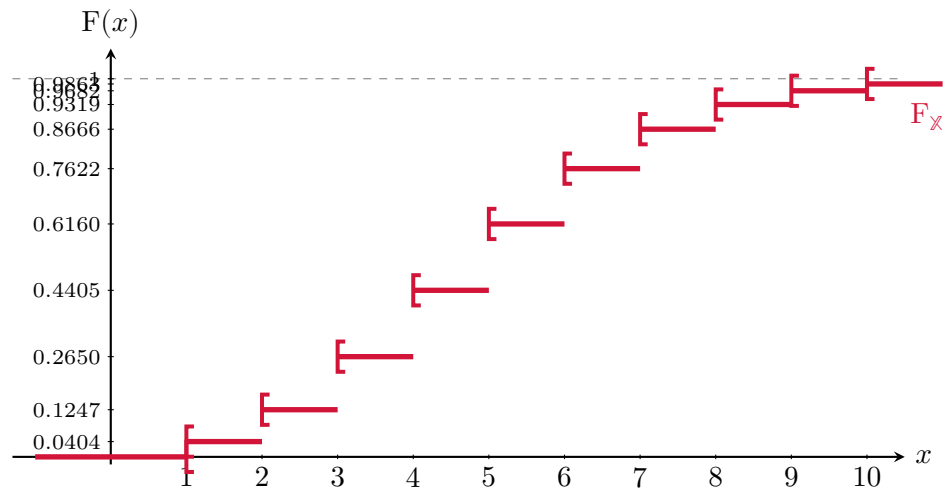
- On considère un serveur téléphonique qui reçoit en moyenne trois appels toutes les minutes.

La variable aléatoire comptant le nombre d'appels reçus par le serveur en une minute suit une $\mathcal{P}(3)$.

Fonction de répartition : $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$.

⚠ Attention

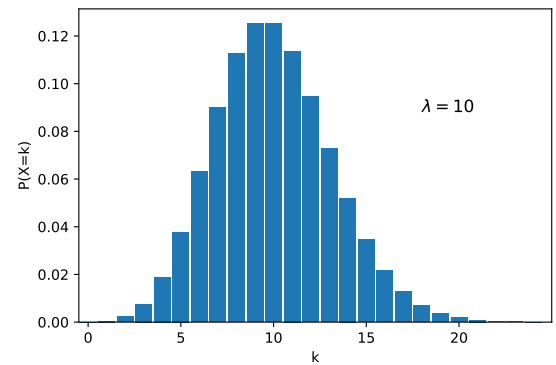
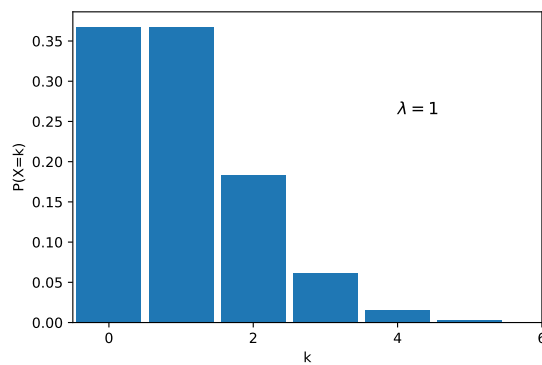
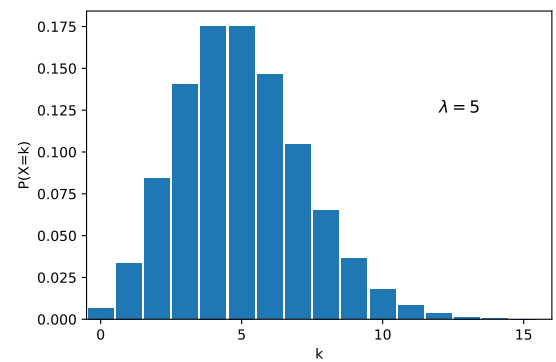
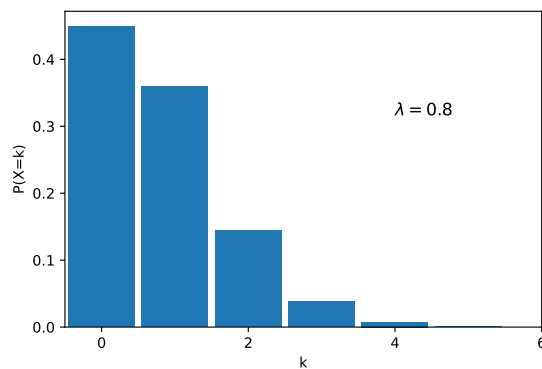
« On a sanctionné les copies dans lesquelles Poisson (ou tout autre mathématicien) était écrit sans majuscule. »
Rapport de Jury HEC 2021



Représentation de $\mathcal{P}(\lambda)$:

Ci-dessous quelques diagrammes en bâtons de la loi :

$\mathcal{P}(\lambda)$ où $p \in \{0, 8; 1; 5; 10\}$.



Et le code en [Python](#) :

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import math
3
4 # Paramètre
5 lam = ... # Le paramètre lambda
6

```

```

7  # Support tronqué
8  val = list(range(0, 25))
9
10 # Loi de Poisson
11 loi = [math.exp(-lam) * lam**k / math.factorial(k) for k in val]
12
13 # Création figure
14 fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,4))
15
16 # Histogramme discret
17 ax.bar(val, loi, width=0.9)
18
19 # Axes
20 ax.set_xlabel("k")
21 ax.set_ylabel("P(X=k)")
22
23 # Graduations entières
24 ax.set_xticks([0,5,10,15,20])
25
26 # Limites pour un rendu propre
27 ax.set_xlim(-0.5, 25)
28
29 # Annotation
30 ax.text(18, max(lois)*0.7,
31        rf"$\lambda = \{lam}$",
32        fontsize=12)
33
34 # Affichage
35 plt.show()

```

Proposition 8 :

Soient $\lambda > 0$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Alors :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.
2. De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \lambda.$$

 Preuve :

Espérance : $\mathbb{X}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 1} k \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) &= \sum_{k=1}^n k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \quad \left(\text{car } \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} \right) \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} \quad (\text{par décalage d'indice}) \\
 &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!}
 \end{aligned}$$

Or, la série exponentielle $\sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^j}{j!}$ est une série convergente.

On en déduit que $\mathbb{X}$ admet une espérance. De plus,

$$\mathbf{E}(X) = e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \lambda \times e^{\lambda} = \lambda$$

Variance : La variable aléatoire $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum_{k \geq 1} k^2 \mathbf{P}([X = k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.

En se rappelant encore que $\forall k \in \mathbb{N}$, on peut écrire $k^2 = k(k-1) + k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 \mathbf{P}([X = k]) &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^n k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\text{car } k^2 = k(k-1) + k) \\ &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^n k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car les premiers termes de} \\ \text{ces sommes sont nuls} \end{array} \right) \\ &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^n \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) \\ &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \right) \quad (\text{par décalage d'indice}) \\ &= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right). \end{aligned}$$

Or, la série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ est une série convergente.

On en déduit que $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre 2, donc une variance.

De plus,

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathbf{P}([X = k]) = e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = e^{-\lambda} (\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda.$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$



INDEX

Espérance

- d'une loi
 - binomiale, 7
 - certaine, 2
 - de Bernoulli, 4
 - de Poisson, 18
 - géométrique, 13
 - uniforme, 10

Événement

- incompatible, 15

Fonction

- de répartition d'une loi
 - binomiale, 5
 - certaine, 2
 - de Bernoulli, 3
 - de Poisson, 16
 - géométrique, 12
 - uniforme, 9

Loi

- binomiale, 1, 5
- certaine, 2
- de Bernoulli, 1, 3
- de Poisson, 1, 15
- de probabilité, 1
- géométrique, 1, 11
- quasi-certaine, 2
- sans mémoire, 14, 15
- uniforme, 1
- uniforme (discrète), 8

Variance

- d'une loi
 - binomiale, 7
 - certaine, 2
 - de Bernoulli, 4
 - de Poisson, 18
 - géométrique, 13
 - uniforme, 10