

IV

Rappels 1 Variables aléatoires

Plan du chapitre

I VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES	1
I.1 DÉFINITIONS	1
I.2 FONCTION DE RÉPARTITION	3
I.3 LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE	6
II VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTE ET FINIES	7
II.1 RAPPELS	7
II.2 FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE	7
II.3 LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE	8
II.4 SYSTÈME COMPLET D'ÉVÉNEMENTS ASSOCIÉ À UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE	11
INDEX	13

I. VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

I.1 – Définitions

Définition 1 – Variable aléatoire réelle :

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on appelle *variable aléatoire réelle* toute application :

$$\begin{aligned}\mathbb{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \mathbb{X}(\omega).\end{aligned}$$

telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.

💡 Idée

Ce qu'il faut retenir c'est qu'une variable aléatoire est une application $\mathbb{X}$ de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que l'ensemble des événements qui impliquent $\mathbb{X}$ doivent être observables i.e. être dans la tribu $\mathcal{A}$.

En pratique, on ne vérifiera jamais qu'une application est bien une variable aléatoire, cela sera toujours sous entendu.

Notation : Dans la suite, pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on note :

- $[\mathbb{X} \in I] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) \in I\}$.
- $[\mathbb{X} = x] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) = x\}$.
- $[\mathbb{X} \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) \leq x\}$.

Ainsi, $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire si pour tout réel x , l'ensemble $[\mathbb{X} \leq x] \in \mathcal{A}$ est un événement.

Exemple 1 :

Soit $A \in \mathcal{A}$.

La fonction indicatrice

$$\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

est une variable aléatoire réelle.

Remarque : Elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbf{P}(A)$.

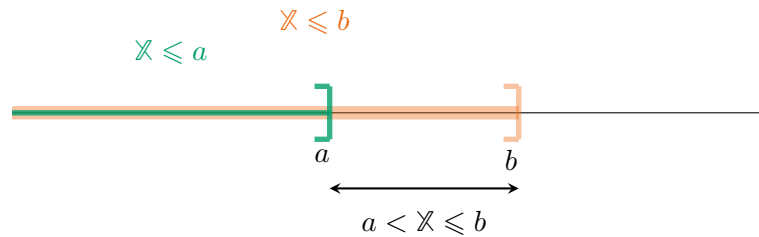
Remarques :

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire réelle, alors $[\mathbb{X} \in]a; b]$ est un événement.

En effet,

$$[\mathbb{X} \in]a; b] = [\mathbb{X} \leq b] \setminus [\mathbb{X} \leq a] = [\mathbb{X} \leq b] \cap \overline{[\mathbb{X} \leq a]} \in \mathcal{A} \quad \text{car} \quad [\mathbb{X} \leq a], [\mathbb{X} \leq b] \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent, le réel $\mathbf{P}([\mathbb{X} \in]a; b])$ est bien défini.



- La donnée des probabilités $\mathbf{P}([\mathbb{X} \in]a; b])$ pour tous réels $a < b$ définit la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle $\mathbb{X}$.

Proposition 1 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

P1 • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\overline{[\mathbb{X} \leq x]} = [\mathbb{X} > x]$.

P2 • Pour tous $x < y < z$,

(Relation de Chasles)

$$[x \leq \mathbb{X} \leq y] \cup [y \leq \mathbb{X} \leq z] = [x \leq \mathbb{X} \leq z].$$

P3 • Pour tous $x < y$, $[\mathbb{X} \leq x] \subset [\mathbb{X} \leq y]$.

P4 • Soient I et J deux intervalles disjoints, alors $[\mathbb{X} \in I] \cap [\mathbb{X} \in J] = \emptyset$.

P5 • Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ formant une partition de $\mathbb{R}$, alors la famille d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \geq 0, A_n = [\mathbb{X} \in I_n],$$

forme un système complet d'événements.

Proposition 2 – Opérations sur les variables aléatoires :

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Alors,

- la combinaison linéaire $\lambda X + \mu Y$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- le produit $X \cdot Y$,
- le maximum $\max(X, Y)$ et le minimum $\min(X, Y)$

sont encore des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Remarque : Cela s'étend à un nombre fini de variables aléatoires.

I.2 – Fonction de répartition**Définition 2 – Fonction de répartition :**

Soit X , une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On définit la fonction F_X sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x]).$$

La fonction F_X est la *fonction de répartition* de la variable aléatoire X .

Exemple 2 :

En généralisant l'exercice précédent, la fonction de répartition d'une loi uniforme discrète sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ est donnée par l'expression

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{n} & \text{si } x \in [1 ; n] \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

Proposition 3 – Propriétés de la fonction de répartition :

Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et F_X sa fonction de répartition.

- P1** • $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X > a) = 1 - F_X(a).$
- P2** • Pour tout $t \in \mathbb{R}, F_X(t) \in [0 ; 1].$
- P3** • F_X est croissante : $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad t_1 \leq t_2 \implies F_X(t_1) \leq F_X(t_2).$
- P4** • $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1.$
- P5** • F_X est continue à droite : $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} F_X(t) = F_X(a).$
- P6** • $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b, \quad \mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$

Preuve :

- P1** • Par définition de la fonction de répartition, $F_X(a) = \mathbf{P}(X \leq a).$

Méthode

À la fin de chaque calcul d'une fonction de répartition, il est toujours utile de vérifier rapidement les trois premiers points.

Or, les événements $\{X \leq a\}$ et $\{X > a\}$ sont complémentaires dans Ω , donc disjoints et leur réunion est Ω .

Ainsi, $P(X \leq a) + P(X > a) = 1$.

On en déduit immédiatement :

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a).$$

P2 • La probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1.

P3 • Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Par croissance de la probabilité, on a :

$$\begin{aligned} t_1 \leq t_2 &\implies [X \leq t_1] \subset [X \leq t_2] \\ &\implies P([X \leq t_1]) \leq P([X \leq t_2]) \\ &\implies F_X(t_1) \leq F_X(t_2). \end{aligned}$$

P4 • La fonction F_X est croissante et majorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, la limite de F_X en $+\infty$ existe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = [X \leq n]$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, donc d'après le **théorème (??)** de la limite monotone pour les probabilités :

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n).$$

Par croissance de F_X ,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in \mathbb{R}}} F_X(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} F_X(n) = 1.$$

Procédons de même pour la limite de F_X en $-\infty$:

F_X est croissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, la limite de F_X en $-\infty$ existe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = [X \leq -n]$. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le **théorème (??)** de la limite monotone pour les probabilités :

$$0 = P(\emptyset) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n).$$

Par croissance de F_X ,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n) = 0.$$

P5 • Soit $a \in \mathbb{R}$. De nouveau, le théorème de la limite monotone pour les fonctions justifie l'existence de la limite à droite en a de la fonction de répartition.

Étudions la limite de $F_X\left(a + \frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $C_n = \left[X \leq a + \frac{1}{n}\right]$. La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les probabilités :

$$F_X(a) = P([X \leq a]) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Donc, } F_X(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} F_X(t).$$

P6 • Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, sachant que $[X \leq a] \subset [X \leq b]$ on a

$$F_X(b) - F_X(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = P([X \leq b] \setminus [X \leq a]) = P(a < X \leq b).$$



Grâce au théorème de la limite monotone, on sait qu'une fonction de répartition admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

En fait, toutes les fonctions de répartition que l'on considérera seront continues par morceaux.

⚠ Attention

Il existe cependant des variables aléatoires dont la fonction de répartition n'est pas continue par morceaux mais on n'en parlera pas.

Théorème 4 – Caractérisation d'une fonction de répartition :

Une application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si, et seulement si elle satisfait les trois points suivants :

- (i) F est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - (ii) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
 - (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- (i) De plus, on dispose de l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F(t).$$

Corollaire 5 :

Une fonction de répartition F est croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en tout point sauf en un ensemble au plus dénombrable de points (x_i) .

En chacun de ces points,

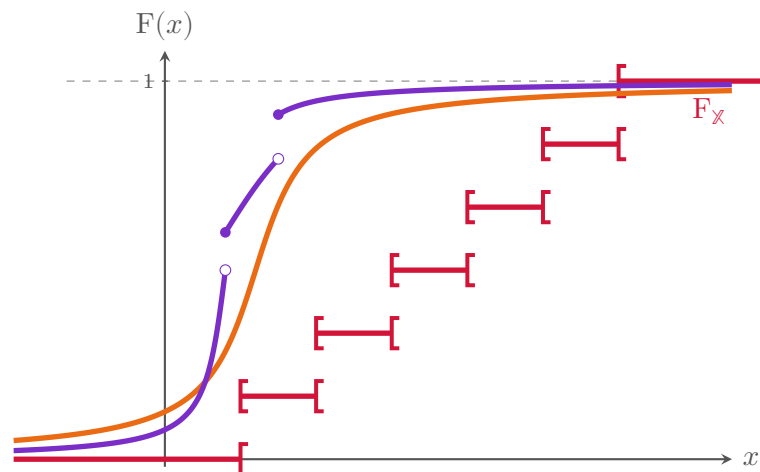
$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} F(x) < F(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} F(x),$$

et le saut est égal à

$$F(x_i) - F(x_i^-) = P(X = x_i).$$

Exemple 3 :

Les trois courbes suivantes sont celles de fonctions de répartition de variables aléatoires réelles.



À retenir
 F_X est constante par morceaux si, et seulement si X est discrète.

En effet, elles sont toutes les trois croissantes, continues sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre dénombrable de points où elles sont seulement continues à droite, et elles sont bien de limite 0 et 1 respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

I.3 – Loi d’une variable aléatoire

Définition 3 – Loi d’une variable aléatoire :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire.

On appelle **loi de la variable** X l’application $\mathbf{P}_X$ définie par :

$$\mathbf{P}_X : A \mapsto \mathbf{P}([X \in A]),$$

où A est une réunion au plus dénombrable d’intervalles de $\mathbb{R}$.

Attention
 Y suit la même loi que X n’implique pas que $Y = X$.

Contre-exemple 4 – Avoir la même loi ne signifie pas être égales :

On lance deux pièces équilibrées indépendantes et on définit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la première pièce donne Pile,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième pièce donne Pile,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\mathbf{P}([X = 1]) = \mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X = 0]) = \mathbf{P}([Y = 0]) = \frac{1}{2},$$

Les variables X et Y ont donc la même loi ce qui s’écrit $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$.

Cependant, $\mathbf{P}([X = Y]) = \mathbf{P}(\{PP, FF\}) = \frac{1}{2} \neq 1$ et par conséquent $X \neq Y$.

Théorème 6 – Caractérisation de la fonction de répartition :

Une application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d’une variable aléatoire réelle X si, et seulement si elle satisfait les trois points suivants :

- (i) F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- (ii) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

De plus, on dispose de l’égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X \leq x) - \mathbf{P}(X < x) = F(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F(t).$$

Proposition 7 – Caractérisation de la loi :

Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

La fonction de répartition de X caractérise la loi de X .

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P_X([-\infty; x]).$$

Deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition si, et seulement si elles ont la même loi.

Dans la pratique, on utilisera la fonction de répartition pour déterminer la loi d'une variable aléatoire :

X et Y ont même fonction
de répartition

$\iff$

X et Y ont même loi de
probabilité

II. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTE ET FINIES

II.1 – Rappels

Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, la définition de la variable aléatoire se simplifie.

Définition 4 – Variable aléatoire discrète :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Une variable aléatoire réelle X est dite *discrète* lorsque son ensemble image $X(\Omega)$, i.e. l'ensemble des valeurs prises par X , est dénombrable.

On dit plus précisément que X est une variable *discrète finie* lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini et *discrète infinie* lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

Exemples 5 :

- Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{1}_A$ est discrète finie car $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$.
- Si $X \longmapsto \mathcal{P}(\lambda)$, alors X est discrète infinie car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

II.2 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Dans la pratique, les x_i forment (presque) toujours une suite strictement croissante $x_1 < x_2 < \dots$. Dans ce cas, la fonction de répartition est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Théorème 8 – Caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète :

Une application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X si, et seulement si elle satisfait les trois points suivants :

- (i) F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- (ii) F est en escalier et continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{\substack{x_i \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x_i \leq x}} P(\mathbb{X} = x_i).$$

 **Preuve :** Il suffit de montrer que :

$$[\mathbb{X} \leq x] = \bigcup_{\substack{x_i \leq x \\ i \in I}} [\mathbb{X} = x_i].$$

On raisonne par double inclusions.

$\subset$: Soit $\omega \in [\mathbb{X} \leq x]$. Alors $\mathbb{X}(\omega) \leq x$.

Or $\mathbb{X}(\omega)$ est un élément du support de $\mathbb{X}$ donc s'écrit sous la forme x_i pour un certain $i \in I$ et $\omega \in [\mathbb{X} = x_i] \subset \bigcup_{\substack{x_i \leq x \\ i \in I}} [\mathbb{X} = x_i]$.

$\supset$: Soit $\omega \in \bigcup_{\substack{x_i \leq x \\ i \in I}} [\mathbb{X} = x_i]$.

Alors ω est un élément de l'un des événements $[\mathbb{X} = x_i]$ avec $i \in I$ et $x_i \leq x$.

Ainsi, $\mathbb{X}(\omega) = \{x_i \leq x\}$ donc $\omega \in [\mathbb{X} \leq x]$.

Les événements $[\mathbb{X} = x_i]$ sont deux à deux incompatibles. La σ -additivité de $\mathbf{P}$ fait le reste. 

II.3 – Loi d'une variable aléatoire discrète

Proposition 9 – Loi d'une variable discrète infinie :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors :

— On appelle *loi de probabilité* de $\mathbb{X}$ et on note $\mathbf{P}_{\mathbb{X}}$ l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbb{X}} : \mathbb{X}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathbf{P}_{\mathbb{X}}(x) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]). \end{aligned}$$

— De plus, si les x_i forment une suite strictement croissante $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$, alors

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = x_1]) = F_{\mathbb{X}}(x_1) \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2, \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_k]) = F_{\mathbb{X}}(x_k) - F_{\mathbb{X}}(x_{k-1}).$$

Vocabulaire : Donner la loi d'une variable aléatoire discrète $\mathbb{X}$ signifie donner l'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$ des valeurs prises par $\mathbb{X}$ et pour chaque $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x])$.

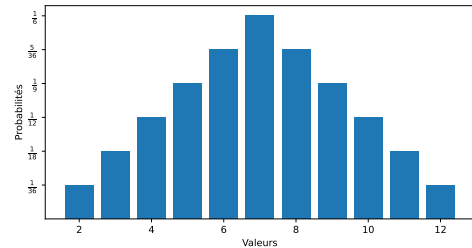
On donne parfois la loi sous forme d'un tableau.

Par exemple, la variable aléatoire $\mathbb{X}$, somme des valeurs de deux dés équilibrés a pour loi :

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([\mathbb{X} = i])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

On peut aussi représenter la loi à l'aide d'un diagramme en bâtons.

En abscisse, on place les valeurs possibles de la variable (ici, $2, 3, \dots, 12$) et en ordonnée les probabilités correspondantes (ici, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 2)$), $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 3)$, $\dots$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 12)$).



Et le code en **Python** :

```

1  import matplotlib.pyplot as plt
2
3  # Données
4  val = [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
5  loi = [1/36,1/18,1/12,1/9,5/36,1/6,
6         5/36,1/9,1/12,1/18,1/36]
7
8  # Création de la figure
9  fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,4))
10
11 # Diagramme en bâtons
12 ax.bar(val, loi)
13
14 # Graduations personnalisées
15 ticks = [1/36,1/18,1/12,1/9,5/36,1/6]
16
17 ax.set_yticks(ticks)
18
19 ax.set_yticklabels([
20     r"$\frac{1}{36}$",
21     r"$\frac{1}{18}$",
22     r"$\frac{1}{12}$",
23     r"$\frac{1}{9}$",
24     r"$\frac{5}{36}$",
25     r"$\frac{1}{6}$"
26 ])
27
28 # Titres
29 ax.set_xlabel("Valeurs")
30 ax.set_ylabel("Probabilités")
31
32 # Affichage
33 plt.show()

```

Remarque : À partir de la fonction de répartition $F_{\mathbb{X}}$, on peut retrouver :

- $\mathbb{X}(\Omega)$: c'est l'ensemble des points x_i de discontinuité de $F_{\mathbb{X}}$;
- $\mathbf{P}(\mathbb{X} = x_i)$ pour tout $x_i \in \mathbb{X}(\Omega)$: c'est la « hauteur du saut » à l'abscisse x_i .

Et réciproquement, à partir de $\mathbb{X}(\Omega)$ et des probabilités $\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$ pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, on peut reconstruire la loi $F_{\mathbb{X}}$ de $\mathbb{X}$. Ainsi on a la

Proposition 10 – Caractérisation de la loi d'une variable discrète :

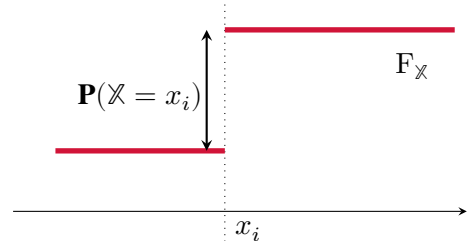
Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète.

Alors la loi de $\mathbb{X}$ est entièrement caractérisée par la donnée :

1. de l'ensemble image $\mathbb{X}(\Omega)$ de $\mathbb{X}$;
2. de tous les $\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$ pour $x \in \mathbb{X}(\Omega)$.

Dès lors, si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires discrètes ayant la même fonction de répartition, on a

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$$



et pour tout indice i ,

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x_i) = \mathbf{P}(\mathbb{Y} = x_i).$$

On retrouve l'égalité en loi.

Méthode 1 – Loi d'une variable aléatoire discrète :

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète $\mathbb{X}$, on ne donne généralement pas la fonction de répartition, mais on explicitera plus simplement :

1. l'ensemble image $\mathbb{X}(\Omega)$ de la variable $\mathbb{X}$;
2. la valeur de $\mathbf{P}(\mathbb{X} = x_i)$ pour tout $x_i \in \mathbb{X}(\Omega)$.

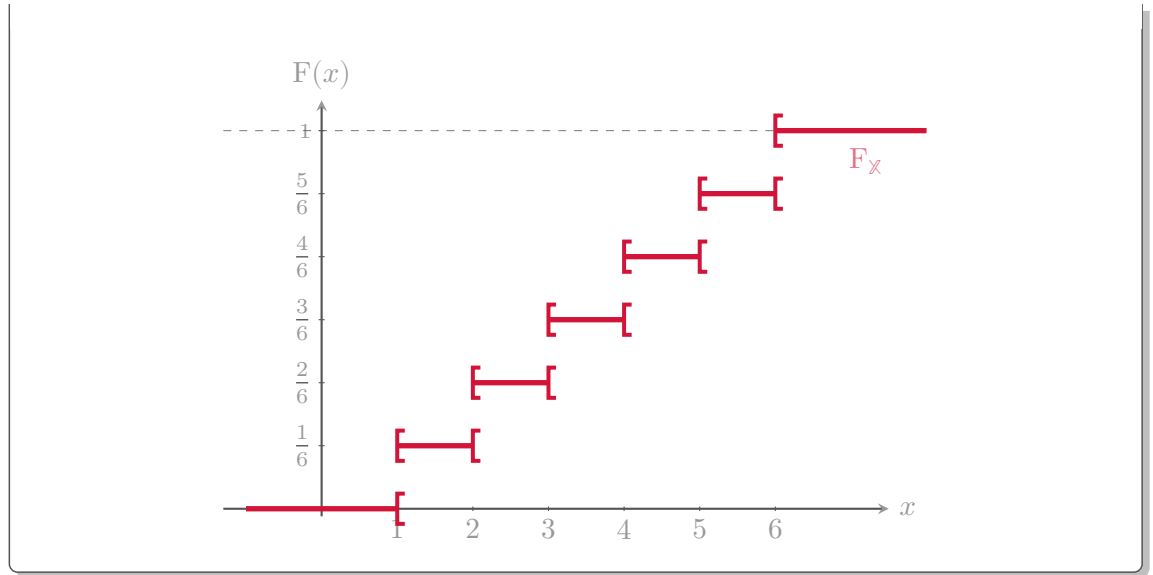
Exemple 6 :

Soit $\mathbb{X}$, la variable aléatoire donnant la valeur d'un dé équilibré.

La loi de $\mathbb{X}$ est donnée par :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \frac{1}{6} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq 6.$$

Quel est le graphe sur $[-1 ; 7]$ de $F_{\mathbb{X}}$.



II.4 – Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète

À une v.a discrète $\mathbb{X}$ est associée le système complet d'événements $([\mathbb{X} = x])_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$.

Proposition 11 – SCE associé à une v.a.r. discrète :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire **discrète** de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On note $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$.

Alors la famille $([\mathbb{X} = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$.

Preuve : Il y a deux propriétés à démontrer.

1. Montrons que $([\mathbb{X} = x_i])_{i \in I}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles :

Soit $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$ et soit $\omega \in [\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{X} = x_j]$.

Cela signifie que :

- $\omega \in [\mathbb{X} = x_i]$ donc $\mathbb{X}(\omega) = x_i$,
- $\omega \in [\mathbb{X} = x_j]$ donc $\mathbb{X}(\omega) = x_j$.

Par définition, $x_i \neq x_j$.

On en conclut qu'il n'existe pas d'élément $\omega \in [\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{X} = x_j]$.

Ainsi $[\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{X} = x_j] = \emptyset$.

2. Montrons que $\Omega = \bigcup_{i \in I} [\mathbb{X} = x_i]$ par double inclusion :

- $\bigcup_{i \in I} [\mathbb{X} = x_i] \subset \Omega$ puisque $\bigcup_{i \in I} [\mathbb{X} = x_i]$ est un événement (en tant qu'union dénombrable d'événements).
- Soit $\omega \in \Omega$.

Alors $\mathbb{X}(\omega) \in \mathbb{X}(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$.

Ainsi, il existe $i \in I$ tel que $\mathbb{X}(\omega) = x_i$ i.e. $\omega \in [\mathbb{X} = x_i]$.



En particulier, il vient

Corollaire 12 :

Si $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire discrète, alors

1. $\forall x \in \mathbb{X}(\Omega), \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \geq 0$;
2. la famille $(\mathbf{P}([\mathbb{X} = x]))_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Théorème 13 – Caractérisation d’une loi de probabilité :

Soient I un ensemble fini ou dénombrable, et $(p_k)_{k \in I}$ une famille de réels satisfaisant :

- (i) $\forall k \in I, p_k \geq 0$;
- (ii) la famille $(p_k)_{k \in I}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Alors la famille $(p_k)_{k \in I}$ définit une loi de probabilité, c’est-à-dire qu’il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire discrète $\mathbb{X}$ sur cet espace tels que :

$$\mathbb{X}(\Omega) = I \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = p_k \text{ pour tout } k \in I.$$

Méthode 2 – Loi de probabilité discrète :

Pour montrer que $(p_k)_{k \in I}$ définit une loi de probabilité, on vérifiera que :

— si $I = \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$(i) \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, p_k \geq 0,$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^n p_k = 1.$$

— si $I = \mathbb{N}$,

$$(i) \quad \forall k \in \mathbb{N}, p_k \geq 0,$$

$$(ii) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \text{ converge et sa somme est égale à 1.}$$

Exemple 7 – I :

existe une variable aléatoire $\mathbb{Y}$ satisfaisant $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.

$$(i) \quad \text{Il est assez clair que } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, p_k = \frac{1}{k(k+1)} \geq 0,$$

(ii) En reconnaissant une somme télescopique, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme vaut 1.

On définit bien une variable aléatoire $\mathbb{Y}$ sur $\mathbb{N}^*$ donnée par sa loi de probabilité $\mathbf{P}([\mathbb{Y} = k]) = \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

INDEX

Événement, 2

Fonction

de répartition, 3, 5, 6

Loi

d'une variable aléatoire, 6

discrète, 10

de Bernoulli, 2

de probabilité, 2, 8, 12

Système

complet d'événements, 2, 11

Théorème

de la limite monotone, 4

Variable aléatoire

aléatoire

finie, 7

discrète, 7

réelle, 1