

Programme

Espérance, Variance & Co

CE QUE DIT LE PROGRAMME EN ECG2 :

1 – Couples de variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques. On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites (sans exiger la vérification de la convergence absolue des séries envisagées). On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y) de variables aléatoires.	$E(g(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y])$ (sous réserve de convergence absolue). Résultat admis. En particulier : espérance de la somme, du produit de deux variables aléatoires discrètes.
Linéarité de l'espérance.	Résultat admis.
Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$.
Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Résultat admis.
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Covariance de deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.	Notation $\text{Cov}(X, Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbb{R}$, $\text{Cov}(X, a) = 0$.
Formule de Koenig-Huygens. Conséquence.	$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes et possèdent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle. Réciproque fausse.
Coefficient de corrélation linéaire. Propriétés.	Notation $\rho(X, Y)$. $ \rho(X, Y) \leq 1$. Cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.
Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes. Cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	On pourra admettre ce résultat.

2 – Suites de variables aléatoires discrètes

Espérance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes.
Variance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.

CE QUE DISAIT LE PROGRAMME EN ECG1 :

3 – Moments d’une variable aléatoire discrète

Définition de l’espérance.	Quand $X(\Omega)$ est infini, une variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente. Notation $E(X)$.
Linéarité de l’espérance. Positivité.	Résultats admis.
Variables aléatoires centrées.	
Théorème de transfert : espérance d’une variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l’ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .	Quand $X(\Omega)$ est infini, $E(g(X))$ existe si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ converge absolument, et dans ce cas $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
$E(aX + b) = aE(X) + b$.	
Variance, écart-type d’une variable aléatoire discrète	Notations $V(X), \sigma(X)$. discrète.
Formule de Kœnig-Huygens.	$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
$V(aX + b) = a^2 V(X)$.	
Variables aléatoires centrées réduites.	On notera X^* la variable aléatoire centrée réduite associée à X .

4 – Lois usuelles

a) Lois discrètes finies

Espérance, variance.

b) Lois discrètes infinies

Espérance, variance