

Remédiation 5

Système linéaire -- De rang 1.

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

Résoudre le système suivant :

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 6 \\ -2x - 3y + z = -3. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

Une seule méthode, l'algorithme de Gauss : on effectue des opérations élémentaires sur les lignes du système afin de l'échelonner.

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 6 \\ -2x - 3y + z = -3 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1] \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Commentaires :

- Le système est échelonné.
- Il y a 1 inconnues principales z , 2 inconnue secondaire x et y .
- À ce stade, on sait déjà que le système admet une infinité de solutions

On exprime alors l'inconnue principale z en fonction des inconnues secondaires x et y choisies :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -3 + 2x + 3y. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est un plan affine :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{(x, y, -3 + 2x + 3y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Commentaires : Pour trouver des triplets solutions, il suffit de faire varier x et y dans $\mathbb{R}$.

i Remarque

On peut choisir x et y ou y et z comme inconnues secondaires sans changer les solutions.

À retenir

On dit que le système est de rang 1 (le nombre d'équations indépendantes qui restent).