

Remédiation 4

Système linéaire -- De rang 2.

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

Résoudre le système suivant :

$$(S_2) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x + 7y + z = 11 \\ 2x + 2y - 4z = -2. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

Une seule méthode, l'algorithme de Gauss : on effectue des opérations élémentaires sur les lignes du système afin de l'échelonner.

$$(S_2) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x + 7y + z = 11 \\ 2x + 2y - 4z = -2 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ y + 3z = 5 \\ -y - 3z = -5 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ y + 3z = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Commentaires :

- Le système est échelonné.
- Il y a 2 inconnues principales x et y , 1 inconnue secondaire z .
- À ce stade, on sait déjà que le système admet une infinité de solutions.

On exprime alors les inconnues principales x et y en fonction de l'inconnue secondaire z choisie :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = z + 3 \\ y = -3z + 5 \\ z = z \end{cases}$$

On poursuit l'élimination dans la première équation à partir de la deuxième :

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{cases} 2x = 10z - 12 \\ y = -3z + 5 \\ z = z \end{cases} \xrightarrow[L_1 \leftarrow \frac{1}{2}]{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}} \begin{cases} x = -6 + 5z \\ y = 5 - 3z \\ z = z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est une droite affine :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \{(-6 + 5z, 5 - 3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Commentaires : Pour trouver des triplets solutions, il suffit de faire varier z dans $\mathbb{R}$.

i Remarque

On peut choisir x ou y comme inconnues secondaires sans changer les solutions.

À retenir

On dit que le système est de rang 2 (le nombre d'équations indépendantes qui restent).