

Remédiation 3

Système linéaire -- De rang 3.

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

Résoudre le système suivant :

$$(S_3) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x + 7y + z = 11 \\ -2x + y + 5z = 9. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

Une seule méthode, l'algorithme de Gauss : on effectue des opérations élémentaires sur les lignes du système afin de l'échelonner.

$$(S_3) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x + 7y + z = 11 \\ -2x + y + 5z = 9 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1] \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ y + 3z = 5 \\ 4y + 4z = 12 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2] \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ y + 3z = 5 \\ -8z = -8 \end{cases}$$

Commentaires :

- Le système est échelonné.
- il y a 3 inconnues principales x , y et z , 0 inconnues secondaires.
- À ce stade, on sait déjà que le système admet un unique triplet solution

On continue pour trouver les solutions. Ici commence l'« élimination de Jordan » :

$$\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{1}{8}L_3] \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ y + 3z = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3, L_1 \leftarrow L_1 + L_3] \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2] \begin{cases} 2x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1] \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est un singleton :

$$\mathcal{S}_3 = \{(-1, 2, 1)\}.$$

À retenir

On dit que le système est un système de Cramer ou que le système est de rang 3.