

Remédiation 5

Nature d'une série -- À l'aide de la convergence absolue

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

Quelle est la nature des séries :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} ?$

2. $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n) ?$

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. $\left\{ \begin{array}{l} - \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}. \\ - \text{La série de terme général } \frac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente.} \end{array} \right.$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est donc absolument convergente donc convergente.

2. $\left\{ \begin{array}{l} - \forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq \cos(n) \leq 1 \text{ donc } \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n) \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n. \\ - \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n) \right| \text{ et } \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ sont de signe constant (positif).} \\ - \text{La série de terme général } \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ est une série géométrique convergente.} \end{array} \right.$

D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n) \right|$ est convergente.

La série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n)$ est donc absolument convergente donc convergente.

Attention

L'absolue convergence ne fonctionne pas pour montrer la divergence !