

Remédiation 4

Nature d'une série -- À l'aide de la divergence grossière

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

Quelle est la nature des séries :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{\ln(n)}$?

2. $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?

3. $\sum_{n \geq 0} (-2)^n$?

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

✂ Méthode

Le cas le plus simple à regarder en premier.

1. Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln(n)} = +\infty \neq 0$ donc le terme général ne tend pas vers 0 et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{\ln(n)}$ diverge (grossièrement).
2. $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^1 \neq 0$ donc le terme général ne tend pas vers 0 et la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ diverge (grossièrement).
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^{2n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^{2n+1} = -\infty$ donc le terme général n'a pas de limite en $+\infty$ et sûrement pas 0 donc la série $\sum_{n \geq 0} (-2)^n$ diverge (grossièrement).