

Remédiation 3

Nature d'une série -- À l'aide de dominations

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

Quelle est la nature des séries :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n2^n} ?$

2. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n} ?$

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

⚠ Attention

Il n'y a qu'une seule démonstration en **3** points clés à vérifier !

$$1. \left\{ \begin{array}{l} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \text{ par croissances comparées donc} \\ \frac{\ln(n)}{n2^n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right). \\ - \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{n2^n} \text{ et } \frac{1}{2^n} \text{ sont de signe constant (positif).} \\ - \text{La série de terme général } \frac{1}{2^n} \text{ est une série géométrique convergente.} \end{array} \right.$$

D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n2^n}$ est convergente.

$$2. \left\{ \begin{array}{l} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \text{ donc } \frac{1}{n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n} \right). \\ - \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{n} \text{ et } \frac{1}{n} \text{ sont de signe constant (positif).} \\ - \text{La série de terme général } \frac{1}{n} \text{ est divergente.} \end{array} \right.$$

D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.