

Remédiation 2

Nature d'une série -- À l'aide d'équivalences

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

Quelle est la nature des séries :

1. $\sum_{n \geq 0} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) ?$

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} ?$

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

⚠ Attention

Il n'y a qu'une seule démonstration en **3** points clés à vérifier !

i Remarque

On peut préciser que c'est la série harmonique ou une série de Riemann pour $\alpha = 1$ mais ce n'est pas le plus important qui est de préciser le signe constant.

$$1. \begin{cases} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} \\ - \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq 0 \text{ (ou de signe constant) donc } \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \text{ aussi.} \\ - \text{La série de terme général } \frac{1}{n} \text{ est divergente.} \end{cases}$$

D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\sum_{n \geq 0} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ est divergente.

$$2. \begin{cases} - \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}. \\ - \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0 \text{ (ou de signe constant) donc } \frac{1}{(n+1)^2} \text{ aussi.} \\ - \text{La série de terme général } \frac{1}{n^2} \text{ est convergente.} \end{cases}$$

D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente.