ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Devoir surveillé de rentrée

05/09/2023

Durée : 2h

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que les quantités qui suivent soient bien définies) :

1. $\dfrac{1}{4x^2}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4x^2}}\sqrt{\frac{5}{4x^2}}}$ (avec $x > 0$)
2. $\sqrt{\dfrac{1}{e^{2x^2}}}$
3. $\dfrac{\left(\ln(x^2)\right)^3}{\ln\left(x^{\ln(x)}\right)}$ (avec $x > 0$)
4. $x\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)-\dfrac{2}{x^2-1}$
5. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$
6. $\dfrac{(n+1)!(n-1)!}{(n!)^2}$

Exercice 2

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -x+2y+z=4 \\ -5x+9y+6z=19 \\ 2x-3y-2z=-6 \end{cases}$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie, pour tout x de $[0,+\infty[$, par la relation : $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

1. (a) Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.
   (b) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f, et un aperçu de sa courbe représentative.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :
   $$0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$$
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + 2$.

(b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'encadrement suivant :

$$2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}$$

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

On admet, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$

5. Montrer à l'aide de ce qui précède que $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4 (algèbre linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big((x, y)\big) = (x + y, x - y, 2x)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer son noyau.
3. À l'aide du théorème du rang, déterminer $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 2), (1, -1, 0)\big)$.
5. Montrer que $u = (2, 4, 6)$ est un élément de $\mathrm{Im}(f)$, et décomposer u dans la base de la question précédente.

Exercice 5 (Informatique)

1. Écrire une fonction Python `pos_mini(L)` qui prend en argument une liste `L` et renvoie *l'indice* d'un des plus petits éléments de `L`.
Par exemple, `pos_mini([1,2,-1,0,-1,5])` *pourra renvoyer 2 ou 4 (les deux indices où apparaît -1, valeur minimale de la liste* `[1,2,-1,0,-1,5]`*).*

On rappelle que si `L` est une liste, la commande `del L[i]` enlève l'élément d'indice `i` de `L`, comme dans l'exemple suivant :

```
>>> L = [1,2,-1,0,-1,5]

>>> del L[2]

>>> L
[1, 2, 0, -1, 5]
```

On cherche à ordonner, dans l'ordre croissant, la liste `L` de la manière suivante :

- On définit une liste vide `M`.
- Tant que `L` n'est pas vide, on détermine la position d'un de ces minimums, on ajoute la valeur de ce minimum à la liste `M`, puis on retire ce minimum de `L`.

Compléter le code suivant pour effectuer ceci :

```
def tri_croissant(L):
    M = ...
    while ... :
        k = pos_mini(L)
        ....
        del ...
    return M
```