DS Rentrée

Corrigé

Exercice 1

1°) $$\frac{1}{4x^2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4x^2}}\sqrt{\frac{5}{4x^2}}} = \frac{1}{4x^2}\sqrt{\frac{4x^2}{5}}\sqrt{4x^2} = \frac{4x^2}{\sqrt{5}.4x^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

2°) $$\sqrt{\frac{1}{e^{2x^2}}} = \sqrt{e^{-2x^2}} = e^{-\frac{2x^2}{2}} = \boxed{e^{-x^2}}$$

3°) $$\frac{\left(\ln(x^2)\right)^3}{\ln\left(x^{\ln(x)}\right)} = \frac{\left(2\ln(x)\right)^3}{\ln(x).\ln(x)} = \frac{8\left(\ln(x)\right)^3}{\left(\ln(x)\right)^2} = \boxed{8\ln(x)}$$

4°) $$x\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right) - \frac{2}{x^2-1}$$

$$= x.\frac{x \cancel{-1} + x \cancel{+1}}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2-1} = \boxed{2}$$

5°) $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\cancel{n+1}}{n}\times\frac{1}{\cancel{n+1}}\right) = \ln(1/n) = \boxed{-\ln(n)}$$

6°) $$\frac{(n+1)!\,(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{\cancel{n!}\times(n+1)\times(n-1)!}{\cancel{n!}\times n!} = \frac{(n+1)\,\cancel{(n-1)!}}{n\times\cancel{(n-1)!}}$$

$$= \boxed{\frac{n+1}{n}}$$

Exercice 2.

Pivot de Gauss !

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 4 \\ -5x + 9y + 6z = 19 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ 2x - 3y - 2z = -6 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 4 \\ \quad -y + z = -1 \\ \quad y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \underline{\underline{2}} \\ z = -1 + y = \underline{\underline{1}} \\ x = 2y + z - 4 = 4 + 1 - 4 = \underline{\underline{1}} \end{cases}$$

La solut° est $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Exercice 3

1a. Pour $\forall\, x \geq 0$, $(x+1)^2 \neq 0$ donc le dénominateur ne s'annule pas : f est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x \geq 0$:
$$f'(x) = \frac{1.(x+1)^2 - x.2(x+1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{\cancel{(x+1)}(x+1-2x)}{(x+1)^{\cancel{4}3}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}}$$

1b. Pour $\forall\, x \geq 0$, $(x+1)^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur :

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

On obtient :

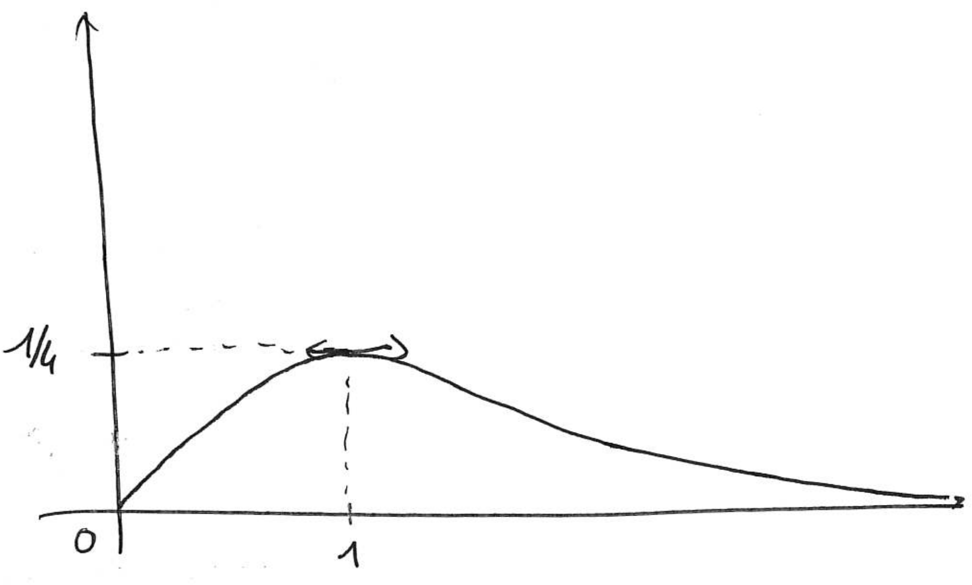
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

1c. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{x}_{\to +\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}_{\to 1}} = \underline{\underline{0}}$$

1d. D'après ce qui précède :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

et on a l'aperçu suivant :



2a. $u_1 = f(u_0) = \dfrac{u_0}{(u_0+1)^2} = \dfrac{1}{2^2} = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$

$u_2 = \dfrac{1/4}{(1/4+1)^2} = \dfrac{1/4}{(5/4)^2} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{16}{25} = \underline{\underline{\dfrac{4}{25}}}$

2b. On pose donc l'hypothèse $\mathcal{P}(n)$: " $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ ". (3)

- Initialisat° à $n = 1$

$\mathcal{P}(1)$ s'écrit " $0 < u_1 \leq 1$ "

On $u_1 = \frac{1}{4}$ et on a bien $0 < 1/4 \leq 1$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie

- Hérédité

Supposons, pour un entier $n \geq 1$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $0 < u_n \leq 1/n$.

Par croissance stricte de f sur $[0,1]$ (on a bien $[0, \frac{1}{n}] \subset [0,1]$)

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f(0) < f(u_n) \leq f(1/n)$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \frac{1/n}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$$

et on trouve bien $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

D'où l'hérédité, et finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq \frac{1}{n}}$$

2c. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq 1/n$.

$$\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

donc par th des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

3a : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n+1)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n^2 + 2u_n + 1 - 1}{u_n}$$

$$= \frac{u_n^2 + 2u_n}{u_n}$$

$$\boxed{v_n = u_n + 2}$$

3b. Immédiat avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq 1/n$

$$: 2 < u_n + 2 \leq 1/n + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{2 < v_n \leq 2 + \frac{1}{n}}$$

4a. On initialise cette fois à $n = 2$:

$P(2)$ s'écrit. $2(2+1) \leq \frac{1}{u_2} \leq 2(2+1) + \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$

$$\Leftrightarrow \quad 6 \leq \frac{1}{4/25} \leq 6 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 \leq \frac{25}{4} \leq 7.$$

Avec $\frac{25}{4} = \frac{24+1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = 6,25$, on a bien $\underline{\mathcal{P}(2) \text{ vraie}}$ ④

- Soit $n \geq 2$ fixé ; supposons que $2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

On part de $\frac{1}{u_{n+1}} = v_n + \frac{1}{u_n}$ d'après 2b.

$$2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n} \qquad \text{d'après 2b}$$

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \qquad \text{d'après } \mathcal{P}(n))$$

d'où en sommant :

$$2(n+2) \leq v_n + \frac{1}{u_n} \leq 2(n+2) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}}_{= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

et on a bien $\mathcal{P}(n+1)$.

$\Rightarrow$ d'où la propriété recherchée, par récurrence sur $n \geq 2$.

5) [Egalité admise assez classique, on aura l'occasion de la démontrer au cours de l'année].

À l'aide de l'inégalité admise, la q.4 implique :

$$\forall n \geq 2, \quad 2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + 1 + \ln(n).$$

$\div n > 0$

$$2\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{nu_n} \leq 2\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1+\ln(n)}{n}$$

On : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\ln(n)}{n} = 0$ par croiss. comparées.

Les termes extrêmes de l'encadr^{t} tendent donc vers 2 pour $n\to+\infty$.

Par th. des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = 2$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{2}}$

Exercice 4

1). Soient : $u=(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$

$v=(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda u+v) = f((\lambda x_1+x_2, \lambda y_1+y_2))$$

$$= (\lambda x_1+x_2+\lambda y_1+y_2 \,,\, \lambda x_1+x_2-\lambda y_1-y_2 \,,\, 2\lambda x_1+2x_2)$$

$$= \lambda(x_1+y_1, x_1-y_1, 2x_1) + (x_2+y_2, x_2-y_2, 2x_2)$$

$$= \lambda f(u) + f(v).$$

$\boxed{\text{ce qui montre la linéarité de } f}$

2) $u=(x,y) \in \mathrm{Ker}(f)$ ssi $f((x,y)) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ 2x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=0.$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}}$$

3) Le th du rang s'écrit :

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im}(f)$$

$\Rightarrow \quad 2 = 0 + \dim \mathrm{Im}(f) \quad \Rightarrow \boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2}$

4)

On sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2))$ où (e_1, e_2) est une base quelconque de $\mathbb{R}^2$.

En prenant la base canonique :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f((1,0)), f((0,1))\big)$$
$$= \underline{\mathrm{Vect}\big((1,1,2), (1,-1,0)\big)}$$

5) On recherche λ, μ réels tq :

$$(2,4,6) = \lambda(1,1,2) + \mu(1,-1,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \mu = 4 \\ 2\lambda = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \mu = \lambda - 4 = -1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

$\lambda+\mu=2$ est vérifié avec les valeurs ci-dessous.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ainsi : } (2,4,6) = 3(1,1,2) - (1,-1,0) \text{ est bien dans} \\ \mathrm{Vect}\big((1,1,2),(1,-1,0)\big) \\ \text{(et on a la décomposit° demandée)} \end{array}}$$

Exercice 5

1) C'est une variat° de l'algo de recherche de min ; sauf qu'on garde en mémoire, en plus de la valeur minimale, l'indice où elle apparaît.

```
def pos_mini(L):
    i = 0        # contiendra la posit° d'un des min.
    mini = L[0]  #
    for k in range(1, len(L)):
        if L[k] < mini :
            i = k
            mini = L[k]
    return i
```

2) À chaque étape, on repère une valeur minimale dans L, qu'on retire de L pour l'ajouter à la fin de la liste ordonnée qu'on construit ainsi.

```
def tri_croissant(L):
    M = []         # liste vide
    while len(L) > 0 :   # tant que L n'est pas vide
```

```
def
    while
        k = pos_mini(L)      # on localise un min. de L
        M.append(L[k])       # on ajoute la valeur correspondante à M
        del L[k]             # et on retire cette valeur minimale de L
    return M
```