ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2022-2023
Mathématiques

TD1
Espaces vectoriels

1 Géneralités

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? (on démontrera ce qu'on affirme)

1. **(*)** $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
2. **(*)** $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$
3. **(*)** $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$
4. **(*)** $F_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 0 \\ z - x = 0 \end{array}\right.\right\}$
5. **(*)** $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4y - z = 1\}$
6. **(*)** $F_6 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = 0\}$
7. F_7 : L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tels que $P(0) = P(1)$.
8. F_8 : L'ensemble des polynômes de degré 3.

(*) Pour les ensembles parmi les six premiers qui sont des sev, en donner une base.

Exercice 2. Déterminer si les familles suivantes sont libres ; si elles ne le sont pas, en extraire une famille libre engendrant le même espace vectoriel.

1. $\{(1,0,1), (0,2,2), (3,7,1)\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(1,0,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}\right\}$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. $\{P_1, P_2, P_3\}$ dans $\mathbb{R}_2[x]$, où pour tout réel x : $P_1(x) = x - 1$, $P_2(x) = x + 1$, $P_3(x) = x^2 - 1$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel, et $(u_1, u_2) \in E^2$. Montrer que si (u_1, u_2) est libre, alors $(u_1 + u_2, u_1 - u_2)$ est libre.

Exercice 4. **(*)** Écrire les ensembles suivants comme des espaces engendrés ; en donner à chaque fois une base.

1. $F_1 = \{(3y - z, z + y, 4y) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$ (on pourra écrire un polynôme P sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$ et déterminer des conditions sur a, b, c, d pour que P appartienne à F_2).
3. $F_3 = \left\{\begin{pmatrix} x + 2z & x - y & x + y + z \\ 0 & 3x - z & 3x + z \\ 2y & x - y - z & y + 7z \end{pmatrix} \middle| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$
4. $F_4 = \{P_{a,b} = aX^2 + (b - a)X - b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
5. L'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = -M$ (appelées matrices *antisymétriques* ; cet ensemble est noté $A_3(\mathbb{R})$).

2 Avec les dimensions

Exercice 5. On reprend l'espace $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ défini dans le premier exercice.
On note $P_1 = X - 1,\ P_2 = X^2 - X,\ P_3 = X^3 - X^2$.
Donner la dimension de F, et montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de F.

Exercice 6. Donner le rang des familles de l'exercice 2.

Exercice 7. Soient les deux sev de $\mathbb{R}^3$ donnés par $F_1 = \mathrm{Vect}\big((2,3,-1),(1,-1,2)\big)$, et $F_2 = \mathrm{Vect}\big((8,7,1),(6,-1,7)\big)$.

1. Montrer que $(8,7,1) \in F_1$ et $(6,-1,7) \in F_1$.
2. Déterminer $\dim(F_1)$ et $\dim(F_2)$.
3. En déduire $F_1 = F_2$.

Exercice 8. (*)

1. Montrer que la famille $\{(-1,3,1),(0,0,1),(1,-2,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées dans cette base du vecteur (a,b,c).
2. Soient $P_1 = 1$ et $P_2 = X - 1$.
Montrer que la famille $(P_1, P_2, (P_2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées dans cette base de $Q = X^2 + X + 1$.
3. Montrer que la famille $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner les coordonnées dans cette base de la matrice I_2.

Exercice 9.
Donner le rang des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 2 & 4\\0 & -1 & -2\end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\0 & 1 & 4\\-6 & -2 & 0\end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -9 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Exercice 10.

1. Déterminer les réels x et y tels que $v = (x,1,-1,y)$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1,1,2,1)$ et $v_2 = (2,1,5,3)$.
2. À quelle condition sur (x,y,z) le vecteur $v = (x,y,z)$ appartient-il au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (3,-1,3)$ et $v_2 = (-1,2,4)$?

Exercice 11. Soit $K = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; on note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $MK = KM = M$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que toute matrice de E est non inversible.
3. Soit $M = \begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix}$. Donner des conditions sur $a, b, \dots, h, i$ pour que $M \in E$. En déduire une base de E, et $\dim(E)$.

3 Plus difficile

Exercice 12 (D'après HEC)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un sev de E de dimension p, G un sev de E de dimension q, avec $p+q=n$. On suppose que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_{\mathrm{E}}\}$.
Soient $(u_1,\dots,u_p)$ une base de F et $(v_1,\dots,v_q)$ une base de G.

1. Montrer que $(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$ est une base de E.
2. Montrer que tout vecteur x de E s'écrit **de manière unique** sous la forme $x=x_{\mathrm{F}}+x_{\mathrm{G}}$, où $x_{\mathrm{F}}\in\mathrm{F}$ et $x_{\mathrm{G}}\in\mathrm{G}$.
   NB : On dit dans ce cas que F et G sont *supplémentaires.*

Exercice 13 (Noyaux itérés)**.**
Soit $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ où E est de dimension $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$, et que $\mathrm{Im}\left(f^2\right)\subset\mathrm{Im}(f)$.
2. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{Ker}\left(f^p\right)\subset\mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right)$, et que $\mathrm{Im}\left(f^{p+1}\right)\subset\mathrm{Im}\left(f^p\right)$.
3. Si, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Ker}\left(f^p\right)\not\subseteq\mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right)$) (*ie* une inclusion stricte), que dire de la suite des dimensions $(n_p)=\left(\dim(\mathrm{Ker}\left(f^p\right))\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$? En déduire qu'il existe un $p_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}\left(f^{p_0}\right)=\mathrm{Ker}\left(f^{p_0+1}\right)$.
4. Montrer : $\forall\, k\geqslant p_0,\ \mathrm{Ker}\left(f^k\right)=\mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right)$.

Ainsi, à partir d'un certain rang p_0*, la suite des noyaux itérés est stationnaire :* $\forall\, k\geqslant p_0,\ \mathrm{Ker}\left(f^k\right)=\mathrm{Ker}\left(f^{p_0}\right)$.

5. À l'aide d'un argument sur les dimensions, montrer qu'on a également $\forall\, k\geqslant p_0,\ \mathrm{Im}\left(f^k\right)=\mathrm{Im}\left(f^{p_0}\right)$.
6. Exemple : soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\4&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. À partir de quel entier p la suite des noyaux $\left(\mathrm{Ker}\left(f^p\right)\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ devient-elle stationnaire ?

Solutions

1 1. oui, on a $F_1 = \text{Vect}(1,1)$.

2. non : $(0,1)$ est élément, mais son opposé $(0,-1)$ ne l'est pas.

3. oui. On écrit $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\} = \{(x,y,x+y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\big((1,0,1),(0,1,1)\big)$. Ces deux derniers vecteurs forment une famille génératrice de F_3 ; ce sont deux vecteurs non colinéaires donc ils forment aussi une famille libre ; donc une base de F_3.

4. oui. On écrit $F_4 = \{(x,-2x/3,x) \mid x\in\mathbb{R}\}$; ce qui donne la famille génératrice $(1,-2/3,1)$; ce vecteur étant non nul il forme une famille libre, donc une base de F_4.

5. non : le vecteur nul $(0,0,0)$ n'appartient pas à F_5.

6. oui : le polynôme nul vérifie $P(1)=0$; et pour tous P, Q de F_6 et tout λ réel, $(\lambda P+Q)(1) = \lambda P(1)+Q(1) = \lambda\times 0+0 = 0$; donc $\lambda P + Q \in F_6$.
On peut en fait écrire $P : x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d \in F_6 \Leftrightarrow a+b+c+d=0 \Leftrightarrow P(x) = a(x^3-1)+b(x^2-1)+c(x-1) \Leftrightarrow$ P est combinaison linéaire des polynômes $P_i : x\mapsto x^i-1$ pour $i=1,2,3$.
Finalement $F_6 = \text{Vect}(X^3-1, X^2-1, X-1)$. Cette famille de polynômes est génératrice de F_6.
Montrons qu'elle est libre : soient a,b,c tels que, pour tout réel x, $a(x^3-1)+b(x^2-1)+c(x-1)=0$; on écrit aussi $ax^3+bx^2+cx-a-b-c=0$ et par identification de coefficients, $a=b=c=0$: la famille est bien libre. C'est une base de F_6.

7. oui : le polynôme nul vérifie $P(0)=P(1)$; et pour tous P, Q de F_7 et tout λ réel, $(\lambda P+Q)(1) = \lambda P(1)+Q(1) = \lambda P(0)+Q(0) = (\lambda P+Q)(0)$.

8. non : si $P(x)=x^3$, P et $-P$ sont de degré 3, mais leur somme (0) ne l'est pas.

2 1. Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1(1,0,1)+\lambda_2(0,2,2)+\lambda_3(3,7,1) = (0,0,0)$. On trouve avec un système linéaire que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$; donc cette famille est libre.

2. $(1,0,0)+(0,1,1) = (1,1,1)$ donc $\text{Vect}\big((1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\big) = \text{Vect}\big((1,0,0),(0,1,1)\big)$. Ces deux derniers vecteurs sont non colinéaires, donc forment une famille libre.

3. Soient a,b,c,d tels que $a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Un pivot sur le système obtenu donne $\begin{cases}a+b-d=0\\ b+2c-2d=0\end{cases}$. Ce système admet des solutions non nulles donc la famille est liée : pour $a=1$ et $b=0$ on obtient $d=1$ et $c=1$; en notant $C_1,\dots,C_4$ les 4 colonnes on a ainsi montré que $C_1+C_3+C_4=0$.
On peut donc exprimer (par exemple) $C_4 = -C_1-C_3$; et

$$\text{Vect}(C_1,C_2,C_3,C_4) = \text{Vect}(C_1,C_2,C_3)$$

On reprend ensuite trois réels a,b,c tels que $aC_1+bC_2+cC_3=0$. Ceci mène au système précédent dans lequel $d=0$; soit $\begin{cases}a+b=0\\ b+2c=0\end{cases}$.
$c=1, b=-2, a=2$ est une solution non nulle : on a la relation de liaison $2C_1-2C_2+C_3=0$ et on peut par exemple avoir $C_3 = 2C_2-2C_1$ et par suite $\text{Vect}(C_1,C_2,C_3) = \text{Vect}(C_1,C_2)$.
Cette fois, C_1 et C_2 sont non colinéaires donc forment une famille libre, qui engendre l'espace vectoriel considéré.

4. Soient a,b,c réels tels que $aP_1+P_2+cP_3$ soit le polynôme nul. On a alors pour tout réel x : $a(x-1)+b(x+1)+c(x^2-1)=0$, soit encore $cx^2+(a+b)x+(-a+b-c)=0$. Un polynôme étant nul ssi tous ses coefficients sont nuls, on obtient le système suivant : $\begin{cases}c=0\\ a+b=0\\ -a+b-c=0\end{cases}$ ce qui donne rapidement $a=b=c=0$: cette famille est libre.

3 Soient α et β tels que $\alpha(u_1+u_2)+\beta(u_1-u_2)=0_E$. On a alors

$$(\alpha+\beta)u_1+(\alpha-\beta)u_2=0_E$$

d'où par liberté de (u_1,u_2) :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases}$$

ce qui donne directement $\alpha=\beta=0$: la famille (u_1+u_2,u_1-u_2) est donc libre.

4

1. $F_1=\{(3y-z,z+y,4y)\mid(y,z)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}\big((3,1,4),(-1,1,0)\big)$. Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une famille libre, donc une base de F_1.

2. $F_2=\{P\in\mathbb{R}_3[x]\mid P(0)=P(1)=0\}$ est l'ensemble des polynômes aX^3+bX^2+cX+d tels que $P(0)=d=0$ et $P(1)=a+b+c+d=0$. P est donc dans F_2 ssi il est de la forme $aX^3+bX^2+(-a-b)X=a(X^3-X)+b(X^2-X)$. Si on pose $P_1=X^3-X$ et $P_2=X^2-X$, F_2 est égal à $\text{Vect}(P_1,P_2)$. Ces deux polynômes sont non colinéaires, donc forment une base de F_2.

3. $F_3=\left\{\begin{pmatrix}x+2z & x-y & x+y+z\\ 0 & 3x-z & 3x+z\\ 2y & x-y-z & y+7z\end{pmatrix}\middle|\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&3\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-1&1\\0&-1&7\end{pmatrix}\right)$. Si on note M_1,M_2,M_3 ces trois matrices, on voit que $xM_1+yM_2+zM_3=0$ donne rapidement $y=0$, puis $x=z=0$: la famille (M_1,M_2,M_3) est libre, donc est une base de F_3.

4. F_4 se présente directement comme $\text{Vect}(X^2-X,X^2-1)$; 2 polynômes non proportionnels donc famille libre, donc base.

5. $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\in A_3(\mathbb{R})$ ssi

$$\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$$

donc (en égalant les coefficients) ssi

$$\begin{cases}a=-a\\d=-b\\g=-c\\b=-d\\e=-e\\h=-f\\c=-g\\f=-h\\i=-i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=e=i=0\\d=-b\\g=-c\\h=-f\end{cases}$$

Ainsi

$$A_3(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}0&b&c\\-b&0&f\\-c&-f&0\end{pmatrix}\middle|\ (b,c,f)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

et

$$A_3(\mathbb{R})=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right)$$

et on voit rapidement que ces 3 matrices forment une famille libre, donc une base de $A_3(\mathbb{R})$.

5 On a trouvé une base de F comportant 3 polynômes dans l'exercice 1 : donc $\dim(F)=3$.
Les trois polynômes P_1,P_2,P_3 vérifient bien $P(1)=0$; et on montre qu'il s'agit d'une famille libre.
On a donc une famille libre de 3 vecteurs de F, avec $\dim(F)=3$: c'est une base de F.

6 La première est libre, à 3 vecteurs, donc de rang 3.
La seconde est de rang 2 car $\text{Vect}\big((1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\big) = \text{Vect}\big((1,0,0),(0,1,1)\big)$ et la famille obtenue ici est libre.
La troisième est de rang 2 pour les mêmes raisons
La quatrième est de rang 3 car libre et de cardinal 3.

7
1. On cherche à écrire $(8,7,1) = a(2,3,-1) + b(1,-1,2)$: on obitnet alors un système sur a et b dont la solution est $a = 3, b = 2$; de sorte que
$$(8,7,1) = 3(2,3,-1) + 2(1,-1,2) \in \text{Vect}\big((2,3,-1),(1,-1,2)\big) = F_1$$
De même, $(6,-1,7) = (2,3,-1) + 4(1,-1,2) \in F_1$.
Comme F_1 est un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire. On peut donc en déduire que $\text{Vect}\big((8,7,1),(6,-1,7)\big) \subset F_1$: $F_2 \subset F_1$.
2. Les deux vecteurs de $\big((2,3,-1),(1,-1,2)\big)$ sont non colinéaires, donc forment une famille libre, donc une base de F_1 : $\dim(F_1) = 2$.
De même $(8,7,1)$ et $(6,-1,7)$ sont non colinéaires, donc $\dim(F_2) = 2$.
3. On a $F_2 \subset F_1$ et $\dim(F_2) = \dim(F_1)$; d'où $F_2 = F_1$.

8
1. On montre la liberté comme d'habitude ; on obtient alors une famille libre à 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, avec $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Les coordonnées de (a,b,c) dans cette base sont les uniques x,y,z tels que
$$(a,b,c) = x(-1,3,1) + y(0,0,1) + z(1,-2,1)$$
Traduit sous forme de système on obtient
$$\begin{cases} -x+z = a \\ 3x-2z = b \\ x+y+z = c \end{cases}$$
ce qui donne $x = b+2a$, $y = c-2b-5a$, $z = b+3a$. La colonne des coordonnées de (a,b,c) est donc $\begin{pmatrix} b+2a \\ c-2b-5a \\ b+3a \end{pmatrix}$.
2. $\lambda_1.1 + \lambda_2(X-1) + \lambda_3(X-1)^2 = 0$ ssi $\lambda_3X^2 + (-2\lambda_3+\lambda_2)X + (\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3) = 0$; ce qui donne, coefficient par coefficient : $\lambda_3 = 0,\ -2\lambda_3+\lambda_2 = 0,\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 = 0$ puis $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3 = 0$: la famille proposée est libre.
C'est une famille libre de trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, avec $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$; donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Pour les coordonnées, on cherche cette fois les λ_1 tels que
$$\lambda_1.1 + \lambda_2(X-1) + \lambda_3(X-1)^2 = X^2+X+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 1 \\ -2\lambda_3+\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 = 1 \end{cases}$$
et on trouve
$$X^2+X+1 = (X-1)^2 + 3(X-1) + 3$$
3. Soient (a,b,c,d) réels tq
$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On a $\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a-c+d = 0 \\ b+c+d = 0 \\ a+b-c = 0 \end{cases}$ ce qui donne $a = b = c = d = 0$ sans trop de difficulté ; cette famille est donc libre.
On a une famille de libre de 4 matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$; $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 2^2 = 4$: c'est donc une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Pour obtenir les coordonnées de $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette base, on résout cette fois le système :
$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-c+d=0 \\ b+c+d=0 \\ a+b-c=1 \end{cases}$ et on trouve $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=0$, $d=-\dfrac{1}{2}$.

La colonne des coordonnées de I_2 dans la base considérée est $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

9 1. $\mathrm{rg}(M_1)=2$ (deux colonnes non colinéaires)

2. $\mathrm{rg}(M_2)=1$ (C_1 nulle, $C_3=2C_2$ avec C_2 non nulle donc le sev engendré par les colonnes est $\mathrm{Vect}(C_2)$ de dimension 1)

3. $\mathrm{rg}(M_3)=3$ (M_3 inversible car triangulaire à coeff diagonaux tous non nuls ; une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible est de rang n.)

4. $\mathrm{rg}(M_4)=3$ (les 3 colonnes forment une famille libre)

5. $\mathrm{rg}(M_5)=1$ (une seule colonne non nulle);

10 1. On cherche donc s'il existe deux coefficients α et β tels que $(x,1,-1,y)=\alpha(1,1,2,1)+\beta(2,1,5,3)$. Ceci équivaut à montrer que le système

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=x \\ \alpha+\beta=1 \\ 2\alpha+5\beta=-1 \\ \alpha+3\beta=y \end{cases}$$

On opère un pivot de Gauss sur ce système : il se met sous la forme

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=x \\ -\beta=1-x \\ 0=-3x \\ 0=y+1-2x \end{cases}$$

Les deux dernières lignes donnent des conditions de compatibilité sur ce système (d'inconnues α et β !) : il admet des solutions ssi $\begin{cases} 0=-3x \\ 0=y+1-2x \end{cases}$, soit $x=0$ et $y=-1$.
NB : les valeurs de α et β ne sont pas demandées, seulement leur existence !

2. C'est le même principe : on examine l'existence de $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(x,y,z)=\alpha(3,-1,3)+\beta(-1,2,4)$. Cette fois on discute l'existence de solutions du système

$$\begin{cases} 3\alpha-\beta=x \\ -\alpha+2\beta=y \\ 3\alpha+4\beta=z \end{cases}$$

qui après pivot devient:

$$\begin{cases} 3\alpha-\beta=x \\ 5\beta=3y+x \\ 0=2x+3y-z \end{cases}$$

et la condition de compatibilité est $2x+3y-z=0$: c'est la condition nécessaire et suffisante (car si elle est vérifiée, le système précédent admet bel et bien une solution !) pour que (x,y,z) appartienne au sev engendré par $v_1=(3,-1,3)$ et $v_2=(-1,2,4)$.
NB : on peut vérifier que v_1 et v_2 vérifient cette condition !

11

12 Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un sev de E de dimension p, G un sev de E de dimension q, avec $p+q=n$. On suppose que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_\mathrm{E}\}$.
Soient $(u_1,\dots,u_p)$ une base de F et $(v_1,\dots,v_q)$ une base de G.

1. La famille $(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$ comporte $p+q$ vecteurs, et $\dim(\mathrm{E})=n=p+q$: il suffit donc de montrer qu'on a une famille libre.
   Soient des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_p,\mu_1,\dots,\mu_q$ tels que
   $$\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_p u_p+\mu_1 v_1+\dots+\mu_q v_q=0_\mathrm{E}$$
   On a alors
   $$\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_p u_p=-\mu_1 v_1-\dots-\mu_q v_q$$
   et ce vecteur appartient à F (combinaison linéaire des u_i) et à G (combinaison linéaire des v_i) ; il appartient donc à $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$; donc est le vecteur nul.
   On en déduit que
   $$\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_p u_p=0_\mathrm{E}\quad\text{et}\quad \mu_1 v_1+\dots+\mu_q v_q=0_\mathrm{E}$$
   et par liberté des (u_i) on a tous les λ_i nuls, par liberté des v_i on a tous les μ_i nuls.
   On a bien montré que la famille est libre.

2. En utilisant la base précédente, on voit que tout vecteur x s'écrit sous la forme
   $$x=\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_p u_p+\mu_1 v_1+\dots+\mu_q v_q$$
   (en introduisant ses coordonnées).
   $\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_p u_p\in\mathrm{F}$ et $\mu_1 v_1+\dots+\mu_q v_q\in\mathrm{G}$ donc on a bien écrit x sous la forme $x_\mathrm{F}+x_\mathrm{G}$.
   Supposons maintenant qu'il existe deux écritures : $x=x_\mathrm{F}+x_\mathrm{G}=y_\mathrm{F}+y_\mathrm{G}$ avec $x_\mathrm{F},y_\mathrm{F}$ éléments de F, et $x_\mathrm{G},y_\mathrm{G}$ éléments de G.
   $x_\mathrm{F}+x_\mathrm{G}=y_\mathrm{F}+y_\mathrm{G}$ donne aussi $x_\mathrm{F}-y_\mathrm{F}=y_\mathrm{G}-x_\mathrm{G}$, et ce vecteur est dans $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$: on en déduit $x_\mathrm{F}-y_\mathrm{F}=0_\mathrm{E}$ et $y_\mathrm{G}-x_\mathrm{G}=0_\mathrm{E}$, d'où $x_\mathrm{F}=y_\mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G}=y_\mathrm{G}$: l'écriture est bien unique.