Devoir maison n°1
À rendre pour le 25/09

Exercice 1

Soient les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(A, B, C, D)$.

1. Montrer que la famille $\{A, B, C, D\}$ est liée. Qu'en déduire sur $\dim(\mathscr{F})$?
2. Montrer que $\{A, B, C\}$ est une base de $\mathscr{F}$. Donner le rang de la famille $\{A, B, C, D\}$.
3. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathscr{F}$? Si oui, donner ses coordonnées dans la base $\{A, B, C\}$.
4. Montrer que $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \middle| \, x + z = y - 2t \right\}$.

Exercice 2

On admet le résultat suivant : $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est inversible ssi elle est de rang* n.

On considère, pour $a \in \mathbb{R}$, $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$.

1. Soit $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer J^2. En déduire :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ M(a)M(b) = M(a + b - 3ab)$$

2. Que vaut $M(0)$? En déduire que, pour $a \neq \frac{1}{3}$, $M(a)$ est inversible ; et donner son inverse (on le cherchera sous la forme $M(a')$, où a' est à déterminer). $M\left(\frac{1}{3}\right)$ est-elle inversible ?
3. On suppose maintenant $a \neq 0$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que : $u_0 = 0$, et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a + (1-3a)u_n$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M(a)^n = M(u_n)$$

4. Donner l'expression explicite de u_n pour tout n. En déduire une expression explicite de $M(a)^n$.
5. On considère maintenant les trois suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par :
   - $u_0 = 1,\ v_0 = w_0 = 0$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$.

   On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = A^n U_0$.
   (c) En déterminant le a tel que $A = M(a)$, déterminer l'expression de u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (plus difficile)

On rappelle le résultat essentiel suivant sur les polynômes : soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Si P admet (au moins) $n+1$ racines deux à deux distinctes, alors c'est le polynôme nul.

1. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que : $P(0) = Q(0)$; $P(1) = Q(1)$; $P(2) = Q(2)$. Montrer que $P = Q$.

   Soient les polynômes suivants : $L_0 = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $L_1 = -X(X-2)$, $L_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$.

2. Calculer les $L_i(j)$ pour $(i, j) \in [\![0,2]\!]^2$.

3. En utilisant la question 1, montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$. Qu'a-t-on montré sur la famille (L_0, L_1, L_2) ?

4. Montrer que (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X$ dans cette base.

5. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ quelconques. Déterminer un polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ (qu'on exprimera en fonction des L_i) tel que $R(0) = a$, $R(1) = b$, $R(2) = c$. Montrer que ce polynôme est unique.