

Applications linéaires

Après avoir introduit les espaces vectoriels de dimension finie dans leur généralité, nous pouvons maintenant généraliser la notion d'application linéaire vue en première année dans le cas des espaces \mathbb{R}^n .

Quand un espace est muni d'une certaine *structure* (ici, la stabilité par combinaisons linéaires), il est intéressant de considérer des fonctions sur cet espace qui *respectent* cette structure. Ici on demandera donc que l'image d'une combinaison linéaire soit la combinaison linéaire des images : c'est la propriété de *linéarité*. Elle contraint fortement la forme de l'application. Par exemple, nous verrons qu'il suffit de connaître les images de vecteurs formant une base de l'espace de départ pour connaître entièrement l'application.

Toujours dans le cadre de la dimension finie qui est le nôtre, on peut associer à une application linéaire sa matrice (cela a été vu en première année dans les espaces \mathbb{R}^n et les bases canoniques). En fait, comme un même espace vectoriel admet plusieurs bases, on peut associer plusieurs matrices à la même application linéaire : ceci dépend du choix de bases. Le chapitre de réduction aura d'ailleurs pour objet de chercher la matrice « la plus simple possible » associée à une application linéaire donnée.

Sauf indication contraire, dans ce qui suit, E et F seront deux espaces vectoriels de dimension finie, et f sera une application linéaire de E dans F.

1 Applications linéaires

1.1 Définition

Définition 1. Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application de E dans F. On dit que f est linéaire si et seulement si :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ fixée. Montrer que $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AMA$ est linéaire.

Dans certains cas particuliers, on introduit des points de vocabulaire :

Définition 2.

- On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans lui-même.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- On note Id_E **l'application identité de E** : c'est l'application de $\mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $x \in E$, $\text{Id}_E(x) = x$.
- On appelle **isomorphisme** de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F.
- On appelle **automorphisme** de E toute application linéaire bijective de E dans lui-même. Un automorphisme est donc la fois un endomorphisme et un isomorphisme.
On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

On déduit de la définition des propriétés importantes :

Proposition 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :

- $f(0_E) = 0_F$;
- $\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$

La formule précédente montre que si on connaît l'image par f de certains vecteurs, on en déduit les images de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs. Notamment, si on connaît les images des vecteurs d'une base de E , on connaîtra l'image de tout vecteur de E (et donc on connaît l'application linéaire dans sa totalité).

La proposition suivante montre qu'une application linéaire est entièrement caractérisée par la donnée des images des vecteurs d'une base ; et que ces images peuvent être choisies sans contrainte.

Proposition 2. On considère une base de E notée (e_1, \dots, e_n) .

- Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. On a $f = g$ si et seulement si : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_i) = g(e_i)$
- Si v_1, \dots, v_p sont p vecteurs quelconques de F , il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_i) = v_i$.

Démonstration. En annexe. □

Si f et g sont des applications linéaires, alors les applications $2f, f + g, \left(\frac{1}{2}f - 7g\right)$ en sont aussi... et de manière générale, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire¹.

On peut également envisager de composer des applications linéaires :

Proposition 3. Soient E, F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Dans les épreuves de concours on considérera surtout des endomorphismes (cas $E = F = G$). On a alors le cas particulier important suivant :

Proposition 4. Si f et g deux endomorphismes de E , alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont aussi des endomorphismes de E .

Il faut alors se souvenir qu'en général $f \circ g \neq g \circ f$:

Exemple 2. Soient f et g les endomorphismes de \mathbb{R}^2 tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x + y) \text{ et } g(x, y) = (3x + y, 2y)$$

Montrer que $f \circ g \neq g \circ f$.

¹Dit autrement : $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

On définit également les *puissances d'un endomorphisme* :

Définition 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit f^n par :

- $f^0 = \text{Id}_E$;
- $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$

On appelle parfois f^n la n -ième itérée de f .

Exemple 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2y, x)$. Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f^3(x, y)$.

Attention : la puissance n n'est donc pas ici une multiplication : on écrit $f^n(x)$ et non $(f(x))^n$. De toute façon, on ne dispose pas d'une opération permettant de multiplier deux vecteurs ; une expression de la forme $(f(x))^n$ n'a, en général, pas de sens.

Dans le cas où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, on dispose de son application réciproque, notée comme d'habitude f^{-1} . Cette réciproque est également linéaire :

Proposition 5. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration. En annexe. □

Remarque 1. En particulier, l'application réciproque d'un automorphisme est aussi un automorphisme.

Remarque 2. Dans le cas d'un automorphisme $f \in \text{GL}(E)$, on peut définir les puissances négatives de f : si $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

Remarque 3. Avec ces notations on retrouve les règles de calcul usuelles sur les puissances :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f^n \circ f^m = f^{n+m} ; \quad \text{et si } f \in \text{GL}(E) : \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, f^n \circ f^m = f^{n+m}$$

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux isomorphismes, on sait par les propositions précédentes que la composée $g \circ f$ est aussi un isomorphisme. On dispose d'une règle de calcul sur la réciproque :

Proposition 6. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux isomorphismes, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ est un isomorphisme ; et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Remarque 4. Dans le cas de l'itérée d'un automorphisme, on a bien $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$.

2 Noyau et image

Deux sous-espaces vectoriels très importants dans l'étude d'une application linéaire sont son *noyau* et son *image*.

2.1 Noyau et image d'une application linéaire

Ces définitions sont analogues à celles données en ECG1 dans le cas des espaces \mathbb{R}^n .

Définition 4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle noyau de f (noté $\text{Ker}(f)$) l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$. On a donc

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} \quad \text{ou encore} \quad x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_F$$

On obtient les propriétés suivantes :

Proposition 7. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- $0_E \in \text{Ker}(f)$ (car on a vu que $f(0_E) = 0_F$).
- $\text{Ker}(f)$ est un sev de E .

Le théorème suivant est extrêmement important en pratique : il donne une condition nécessaire et suffisante d'injectivité assez facile à manipuler.

Théorème 8. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. En annexe. □

On introduit aussi l'image d'une application linéaire :

Définition 5. On appelle image de f (noté $\text{Im}(f)$) l'ensemble des images des vecteurs de E par f .
On a donc

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

On peut reformuler ceci sous la forme :

$$y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists x \in E, y = f(x)$$

Cette seconde caractérisation est souvent utile en pratique.

On vérifie également que :

Proposition 9. $\text{Im}(f)$ est un sev de F

Démonstration. En annexe. □

Par définition (ceci est d'ailleurs vrai hors de toute considération de linéarité), f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$.

On dispose du théorème suivant, important en pratique pour la détermination explicite de l'image d'une application linéaire :

Proposition 10. Soit E un espace vectoriel de dimension n , (e_1, \dots, e_n) une base de E , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

2.2 Rappel : noyau et image d'une matrice

On se ramène essentiellement à la section précédente en considérant une application linéaire associée à la matrice en question.

Définition 6. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors l'application $\varphi_M : X \rightarrow MX$ est linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- On appelle noyau de M (noté $\text{Ker}(M)$) le noyau de φ_M : c'est donc un sev de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
- On appelle image de M (noté $\text{Im}(M)$) l'image de φ_M : c'est donc un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On peut alors appliquer la proposition 10 à la détermination de l'image d'une matrice M : si $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (la colonne à } p \text{ composantes valant toutes 0, sauf la } i\text{-ème composante qui vaut 1).}$$

On note alors, pour $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, que ME_i est égal à C_i (i -ème colonne de M).

Comme (E_1, \dots, E_p) est une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (c'est la base canonique), on en déduit que

$$\text{Im}(M) = \text{Vect}(ME_1, \dots, ME_p) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

Autrement dit :

Proposition 11. L'image d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est le sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de M .

On en déduit immédiatement que :

Proposition 12. Le rang d'une matrice est égal à la dimension de son image.

2.3 Rang d'une application linéaire

On a déjà rencontré la notion de rang pour une famille de vecteurs, et pour une matrice. On va maintenant définir le rang d'une application linéaire.

Définition 7.

On appelle rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ la dimension de $\text{Im}(f)$. On le note $\text{rg}(f)$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , les propriétés vues précédemment montrent que :

Proposition 13. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
On a donc

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Mentionnons quelques cas particuliers lorsque f vérifie certaines propriétés :

Proposition 14.

- f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E)$.
- f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$.
- Conséquence : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration. En annexe. □

Un théorème très important englobe tous ces cas.

Théorème 15 (Théorème du rang). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E un espace vectoriel de dimension finie. On a

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$$

Une conséquence importante nous facilitera beaucoup la vie.

Proposition 16. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec $\dim(E) = \dim(F)$. Alors

- f est un isomorphisme ssi f est injective.
- f est un isomorphisme ssi f est surjective.

Les points précédents sont en particulier valables lorsque f est un endomorphisme de E .

Autrement dit, il suffit de vérifier une seule des deux propriétés injectivité / surjectivité pour obtenir la bijectivité. Le plus souvent, on vérifiera l'injectivité, notamment via l'étude du noyau (voir plus haut).

Méthode :

Pour montrer qu'un endomorphisme est bijectif, il suffit de montrer qu'il est injectif ; on obtient ceci en montrant que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

3 Matrice d'une application linéaire

Dans toute cette section, sauf indications contraires, E sera un espace vectoriel de dimension n , F un espace vectoriel de dimension p , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On notera aussi $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_p)$ une base de F .

3.1 Un exemple dans \mathbb{R}^2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + y, -3x + y)$.

Dans la base canonique de \mathbb{R}^2 (notée \mathcal{B}_c), la colonne des coordonnées de (x, y) est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Par définition, on voit que l'image par f du vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2x + y \\ -3x + y \end{pmatrix}$.

On remarque de plus que

$$\begin{pmatrix} 2x + y \\ -3x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi, « si on représente les vecteurs par leurs coordonnées dans la base canonique, appliquer la fonction f revient à multiplier par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ».

On appelle cette matrice la *matrice de f dans la base canonique* :

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 5. On mentionne deux fois la base canonique \mathcal{B}_c dans l'exemple précédent car il faut spécifier la base considérée dans l'espace de départ, et celle considérée dans l'espace d'arrivée. Dans le cas d'un endomorphisme, ces deux espaces sont égaux, et on prendra quasi-systématiquement ces deux bases identiques. On notera alors $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_c)$.

Remarque 6. Comme les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base considérée, la matrice d'une application linéaire dépendra aussi de cette base.

Considérons par exemple la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$. Soit u le vecteur de \mathbb{R}^2 dont les coordonnées dans \mathcal{B} sont $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On a alors

$$u = a(1, 0) + b(1, 1) = (a + b, b)$$

et donc

$$f(u) = f((a + b, b)) = (2a + 3b, -3a - 2b) = (5a + 5b)(1, 0) + (-3a - 2b)(1, 1)$$

et donc les coordonnées de $f(u)$ dans \mathcal{B} sont $\begin{pmatrix} 5a + 5b \\ -3a - 2b \end{pmatrix}$.

La matrice de f dans la base \mathcal{B} est celle qui transforme $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 5a + 5b \\ -3a - 2b \end{pmatrix}$: on a donc

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

et on constate bien que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) \neq \text{Mat}(f, \mathcal{B}_c)$.

Il existera un moyen plus simple de déterminer la matrice de f dans une base autre que canonique.

3.2 Un exemple entre deux espaces de dimension finie

Soient E et F deux espaces vectoriels ; on suppose E de dimension 2 et F de dimension 3.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E, et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de F.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(e_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ et $f(e_2) = 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ (on a vu que ces conditions caractérisaient complètement f).

Considérons un vecteur $u = xe_1 + ye_2$ de E. Par linéarité, on a

$$\begin{aligned} f(u) &= xf(e_1) + yf(e_2) \\ &= x(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + y(3\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ &= x\varepsilon_1 + (2x + 3y)\varepsilon_2 + (-x - y)\varepsilon_3 \end{aligned}$$

Si on passe aux coordonnées, l'image par f du vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est donc le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ 2x + 3y \\ -x - y \end{pmatrix}$. Ici

encore on peut reconnaître un produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x + 3y \\ -x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est donc la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

Terminons par une observation qui va nous permettre de dégager la méthode de construction de la matrice d'une application linéaire.

La première colonne de la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On rappelle d'autre part que $f(e_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3$: la première colonne de M est la colonne des coordonnées de $f(e_1)$ dans la base \mathcal{B}' . On peut faire une observation similaire sur la seconde colonne de M.

3.3 Méthode générale de construction

On passe maintenant sur des espaces vectoriels de dimension finie quelconque. Soient :

- E un ev de dimension p ; $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
- F un ev de dimension n ; $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F.
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

En nous inspirant des observations de la partie précédente, on **définit** la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de la manière suivante :

Définition 8. Avec les objets introduits en début de section :

- On appelle matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les p colonnes sont les coordonnées dans la base \mathcal{B}' des images des vecteurs de la base \mathcal{B} par l'application f .
- On note $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
- Dans le cas où les bases de départ et d'arrivée sont égales, on notera plus simplement $\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$.

Le premier point est d'usage très fréquent pour construire la matrice d'une application linéaire :

Méthode :

Pour construire la matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans des bases données, on calcule les images par f des vecteurs de la base de E ; les coordonnées (dans la base de F) de ces images sont les colonnes de la matrice recherchée.

On espère alors retrouver la propriété qui motivait la construction : prendre l'image d'un vecteur par f revient à multiplier sa colonne de coordonnées par M . C'est le cas :

Théorème 17. Soit M la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' ; soit $x \in E$, et X sa colonne de coordonnées dans \mathcal{B} . Alors MX est la colonne des coordonnées de $f(x)$ dans \mathcal{B}' .

Démonstration. En annexe. □

3.4 Plusieurs exemples

On remarque tout d'abord la chose suivante :

Proposition 18. Si E est un espace vectoriel de dimension n , et \mathcal{B} une base de E , on a

$$\text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}) = I_n$$

Considérons maintenant divers exemples d'application linéaire :

Exemple 4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (2x - z, x + y + 3z)$$

Construire la matrice de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{R}^2 .

Exemple 5. On reprend l'application de la section 3.1 : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + y, -3x + y)$. On considère la base de \mathbb{R}^2 suivante : $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

Retrouver par la méthode de construction ci-dessus que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Le principe est le même pour tous espaces de dimension finie (*i.e.* pas simplement \mathbb{R}^n). Sur un espace de matrices, on aura par exemple :

Exemple 6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a - 2c & d - a \\ d + 3b - 5a & a + b + c \end{pmatrix}$$

Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Nous verrons d'autres exemples en exercice.

3.5 Propriétés

Le résultat suivant traduit le fait que, à bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' fixées, on peut identifier matrices et applications linéaires :

Proposition 19. Si les espaces E et F et les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont fixées, alors l'application $f \mapsto \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Remarque 7. La propriété d'isomorphisme contient aussi la linéarité ; on en déduit que :

Si $\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M$, $\text{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = N$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\text{Mat}(\lambda f + g, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \lambda M + N$

On dispose également de règles de calcul sur la matrice d'une composée d'applications linéaires (et donc sur la matrice de la puissance d'un endomorphisme) ; et, dans le cas d'un isomorphisme, sur la matrice de l'application réciproque.

Dit simplement : la matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit des matrices de ces applications. Il faut par contre prendre garde aux bases dans lesquelles on se place.

Proposition 20 (Matrice d'une composée).

Soient :

- E, F, G , trois \mathbb{K} -ev de dimensions respectives q, p, n , munis de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$;
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et M sa matrice dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' ;
- $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et N sa matrice dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' .

Alors NM est la matrice de $g \circ f$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'' .

Dans le cas d'endomorphismes, c'est plus simple car on ne considère qu'une base :

Proposition 21 (Matrice d'une composée, cas des endomorphismes).

Soient f et g deux endomorphismes de E , \mathcal{B} une base de E , $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$ et $N = \text{Mat}(g, \mathcal{B})$. Alors $\text{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}) = N \times M$; ce qui s'écrit donc :

$$\text{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}) = \text{Mat}(g, \mathcal{B}) \times \text{Mat}(f, \mathcal{B})$$

Remarque 8. Attention à l'ordre dans le produit !!! (en général $MN \neq NM$).

On en déduit par récurrence, dans le cas d'un endomorphisme f , la matrice de son itérée f^n :

Corollaire 22 (Puissance d'un endomorphisme).

Soient f un endomorphisme de E , \mathcal{B} une base de E , et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\text{Mat}(f^n, \mathcal{B}) = (\text{Mat}(f, \mathcal{B}))^n$$

Dans le même esprit : « la matrice de l'application réciproque de f est l'inverse de la matrice de f » ; soit en version plus rigoureuse :

Proposition 23. $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme si et seulement si sa matrice dans des bases quelconques \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E et F est inversible, et on a alors $\text{Mat}(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = (\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1}$.

et dans le cas des endomorphismes :

Corollaire 24. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme si et seulement si sa matrice dans une base quelconque \mathcal{B} de E est inversible, et on a alors

$$\text{Mat}(f^{-1}, \mathcal{B}) = (\text{Mat}(f, \mathcal{B}))^{-1}$$

3.6 Utilisations de la matrice d'une application linéaire

Dans cette section, f est linéaire de E dans F et $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Détermination du noyau de f Si $x \in E$, et X est la colonne des coordonnées de x dans \mathcal{B} , alors on a

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow MX = \mathbf{0}$$

Il faudra donc bien distinguer les objets : le calcul matriciel permet de déterminer un ensemble de matrices colonne. Mais ces colonnes NE SONT PAS les vecteurs de $\text{Ker}(f)$; ce sont seulement leurs coordonnées. Il faut donc « traduire » le résultat et passer des colonnes aux vecteurs.

Exemple 7. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer $\text{Ker}(f)$.

En fait, dans le cas des espaces \mathbb{R}^n et **lorsqu'on est dans les bases canoniques**, on peut se passer du calcul matriciel et revenir à l'expression de $f((x, y, z))$: les calculs sont les mêmes, ils sont juste disposés différemment !

Exemple 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{Ker}(M)$. En déduire $\text{Ker}(f)$.

Détermination de l'image de f On se souvient que dans le procédé de construction de la matrice d'une application linéaire, chaque colonne de la matrice correspond à l'image d'un vecteur de base.

On a vu que l'image d'une application linéaire f est l'espace engendré par les images des vecteurs de base :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

En observant la matrice on se ramène à un espace engendré par les colonnes, sur lesquelles il est plus aisé d'obtenir des simplifications.

Exemple 9.

- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Im}(f)$.
- Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\text{Mat}(g, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Im}(g)$.

3.7 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

La notion suivante est extrêmement importante car elle permet, étant donnée une matrice, de se ramener à une application linéaire.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'isomorphisme de la proposition 19 nous assure que si on se donne :

- E un espace vectoriel de dimension p , \mathcal{B} une base de E ;
- F un espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B}' une base de F ;

alors **il existe une unique** $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M$. Il faut donc, pour ramener l'étude d'une matrice à celle d'une application linéaire, poser deux espaces vectoriels, et deux bases de ces espaces.

On décide alors de considérer les objets les plus simples possibles :

Définition 9. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à M l'unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^p), \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n))$$

On verra qu'une matrice et son application linéaire associée partagent beaucoup de propriétés similaires.

Exemple 10. Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; et celle associée à

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode : cette notion permet de montrer TRÈS RAPIDEMENT que certaines applications sont linéaires : on identifie f comme l'application canoniquement associée à une matrice donnée.

Par exemple

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - z, x + 3y + 6z, 7y + z) \end{array}$$

est linéaire car c'est l'application canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

3.8 Changement de base

On a vu que la matrice d'une application linéaire donnée dépend des bases dans lesquelles on se place. On peut donc se demander comment se transforme la matrice d'une application quand on change de base. On commence pour cela par introduire les *matrices de passage*.

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E ; on commence par relier les colonnes de coordonnées $X_{\mathcal{B}}$ et $X_{\mathcal{B}'}$.

On remarque, si on note $P = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, on aura, pour tout $x \in E$ et avec les notations habituelles :

$$X_{\mathcal{B}'} = PX_{\mathcal{B}}$$

En pratique, on considérera une première base \mathcal{B} (traditionnellement dénommée « ancienne base »), et une seconde base \mathcal{B}' (la « nouvelle base »), exprimée en fonction de \mathcal{B} , qu'on voudra utiliser. On pose alors :

Définition 10. On appelle matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' la matrice

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

La définition précédente NE VOUS SERVIRA JAMAIS DANS UN EXERCICE ; elle est par contre bien pratique pour effectuer les démonstrations qui suivent.

Il faut par contre absolument retenir le procédé de construction d'une matrice de passage. Si on se souvient comment se construit la matrice d'une application linéaire, on obtient la caractérisation suivante (et qui peut en fait être prise comme définition) :

Définition 11. On définit la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' (notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$) comme la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' (la « nouvelle base ») dans \mathcal{B} (l'« ancienne base »).

Exemple 11 (Un cas particulier très fréquent). Quand l'« ancienne base » est la base canonique, les coordonnées sont les composantes : la matrice de passage est facile à construire !

Par exemple dans \mathbb{R}^3 , la matrice de passage de la base canonique à la base $\{(-1, 3, 1), (0, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ est :

et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice de passage de la base canonique à la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est :

Pour revenir à la discussion de début de paragraphe, on a en fait :

$$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$$

Remarque 9. Ce résultat est assez contre-intuitif : cette relation exprime les coordonnées de x dans l'ancienne base en fonction de ses coordonnées dans la nouvelle, et non des nouvelles coordonnées en fonction des anciennes comme on aurait pu s'y attendre a priori.

Une des propriétés fondamentales des matrices d'applications linéaires montre que si $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, alors P est inversible (car Id_E est un isomorphisme !) et que $P^{-1} = \text{Mat}(\text{Id}_E^{-1}, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Autrement dit :

Théorème 25. Toute matrice de passage est inversible, et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

On peut maintenant donner la manière de changer de base dans la matrice d'une application linéaire : on utilise pour cela la propriété sur la matrice d'une composée.

Théorème 26. Soient :

- \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 deux bases de E ;
- \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}'_2 deux bases de F ;
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = (P_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2})^{-1} \times \text{Mat}(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}$$

Démonstration. En annexe. □

Dans le cas d'un endomorphisme de E , il n'y a qu'une matrice de passage à considérer. Le résultat ci-dessous n'est qu'un cas particulier du précédent, mais c'est celui qu'on aura à utiliser le plus souvent.

Théorème 27 (Changement de base, cas particulier des endomorphismes).

Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases de E ; on pose $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_1)$, $N = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_2)$ et $P = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$.
On a alors :

$$N = P^{-1}MP$$

Ceci motive la définition suivante :

Définition 12.

Deux matrices $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables ssi il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = P^{-1}MP$.

On voit donc que deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

3.9 Considérations sur le rang

On repart de la proposition 13.

Soit f une application linéaire, et M une matrice de f . On sait que :

- $\text{rg}(f) = \text{rg}((f(e_1), \dots, f(e_n)))$;
- $\text{rg}(M)$ est le rang de la famille des colonnes de M ;
- les colonnes de M ne sont autres que les coordonnées des $f(e_i)$.

Il apparaît alors clair que :

Théorème 28. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. On a $\text{rg}(f) = \text{rg}(M)$.

Autrement dit :

Le rang de f est égal au rang de toute matrice représentant f dans des bases quelconques.

On a vu que deux matrices étaient semblables si et seulement si elles étaient les matrices d'un même endomorphisme f dans deux bases. D'après ce qui précède, les propriétés de f se transfèrent à ces matrices :

Proposition 29. Soient M et N deux matrices semblables. Alors :

- M est inversible ssi N est inversible ;
- M et N ont le même rang.

Démonstration.

- Soit f canoniquement associé à M ; alors N est aussi une matrice de f .
 M est inversible ssi f est un isomorphisme ; et de même pour N ; donc M est inversible ssi N est inversible.
- M et N étant deux matrices de f , $\text{rg}(M)$ et $\text{rg}(N)$ sont tous deux égaux à $\text{rg}(f)$.

□

On a alors un moyen simple de déterminer le rang d'une matrice en calculant le noyau de l'application linéaire canoniquement associée, et en appliquant le théorème du rang à cette application.

Exemple 12. On cherche à déterminer le rang de $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à M .

- On détermine $\text{Ker}(f)$, en exprimant $f((x, y, z))$ puis en résolvant $f((x, y, z)) = (0, 0, 0)$:
- On en déduit que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1.
- Le théorème du rang sur f s'écrit $\dim(\mathbb{R}^3) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$, ce qui donne directement $\text{rg}(f) = 2$.
- On peut ainsi conclure $\text{rg}(M) = \text{rg}(f) = 2$.

Exemple 13 (Utilisations du théorème du rang).

Soit l'ensemble $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = y - 3z - t = 0\}$. F est un sev car c'est le noyau de l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + z, y - 3z - t) \end{array}$$

elle-même linéaire car canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

On a de plus $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 2$ (2 lignes non colinéaires).

Le théorème du rang sur f donne $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$ donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

On en conclut que $\dim(F) = 2$ (avec peu de calcul mais pas mal de théorie !).

3.10 Rang et inversibilité

Une conséquence importante du lien entre rang d'une matrice et rang d'une application est le résultat suivant, pour des matrices carrées :

Proposition 30. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi elle est de rang n .

Démonstration. M est inversible si et seulement si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, canoniquement associée à M , est bijective ; donc ssi f est de rang n ; donc ssi M est de rang n . □

Si on revient à la définition du rang comme dimension de l'espace engendré par les colonnes, on conclut que M est inversible ssi ses n colonnes forment une famille de rang n . Or ces colonnes sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qui est de dimension n : la proposition précédente équivaut donc à dire que les colonnes de M forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On vient de montrer :

Proposition 31. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi ses colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4 Démonstrations

Proposition 2

- Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. On a $u = v$ si et seulement si : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_i) = v(e_i)$
- Si v_1, \dots, v_p sont p vecteurs quelconques de F , il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_i) = v_i$.

Démonstration. • La condition nécessaire est évidente.

Supposons maintenant que : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_i) = v(e_i)$. Soit $x \in E$: comme (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on peut écrire $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Alors, par linéarité de u et v :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v(e_i) = v(x)$$

- Soit x un vecteur quelconque de E : on peut l'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. On pose alors $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. On vérifie que u est linéaire et répond bien à la question. L'unicité de f vient du point précédent.

□

Proposition 5

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que f^{-1} est linéaire. Soient donc y_1, y_2 deux vecteurs de F et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a, par définition de f^{-1} : $f(f^{-1}(\lambda y_1 + y_2)) = \lambda y_1 + y_2$.

D'autre part, par linéarité de f : $f(\lambda f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)) = \lambda f(f^{-1}(y_1)) + f(f^{-1}(y_2)) = \lambda y_1 + y_2$.

Les deux vecteurs $f^{-1}(\lambda y_1 + y_2)$ et $\lambda f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$ ont donc la même image par l'application injective (car bijective) f , donc sont égaux. On a bien montré :

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = \lambda f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$$

ce qui donne la linéarité de f^{-1} .

□

Théorème 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. Supposons que f soit injective. On a déjà vu que $0_E \in \text{Ker}(f)$.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$, donc par injectivité, $x = 0_E$. Donc $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Réciproquement, supposons $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$, et soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors par linéarité on obtient $f(x_1 - x_2) = 0_F$; d'où $x_1 - x_2 \in \text{Ker}(f)$, et donc $x_1 = x_2$: f est bien injective. □

Proposition 9

$\text{Im}(f)$ est un sev de F .

Démonstration.

- $0_F = f(0_E)$ appartient à $\text{Im}(f)$: $\text{Im}(f)$ est donc non vide.
- Soient $y_1 \in F, y_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc l'existence de $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Alors : $\lambda y_1 + y_2 = \lambda f(x_1) + f(x_2) = f(\lambda x_1 + x_2)$ par linéarité de f ; ceci montre que $\lambda y_1 + y_2 \in \text{Im}(f)$.

$\text{Im}(f)$ est donc un sev de F .

□

Théorème 17

Soit M la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' ; soit $x \in E$, et X sa colonne de coordonnées dans \mathcal{B} . Alors MX est la colonne des coordonnées de $f(x)$ dans \mathcal{B}' .

Démonstration. Soit $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est sa colonne de coordonnées dans \mathcal{B} .

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (le 1 est en i -ème position). E_i est la colonne des coordonnées de e_i . On a vu

alors que le produit ME_i est égal à la i -ème colonne de M (que l'on va noter C_i).

Effectuons alors le produit MX . Par distributivité :

$$MX = M \left(\sum_{i=1}^p x_i E_i \right) = \sum_{i=1}^p x_i ME_i = \sum_{i=1}^p x_i C_i$$

C_i étant la colonne des coordonnées de $f(e_i)$, $\sum_{i=1}^p x_i C_i$ est la colonne des coordonnées de $\sum_{i=1}^p x_i f(e_i) = f \left(\sum_{i=1}^p x_i e_i \right) = f(x)$, ce qui donne bien la propriété voulue. \square

Proposition 20

Soient E, F, G , trois \mathbb{K} -ev de dimensions respectives q, p, n , munis de bases respectives $(e_i), (\varepsilon_i), (\varepsilon'_i)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et M sa matrice dans les bases (e_i) et (ε_i) ; $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et N sa matrice dans les bases (ε_i) et (ε'_i) .

Alors NM est la matrice de $g \circ f$ dans les bases (e_i) et (ε'_i) .

Démonstration. On a $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, donc le produit NM existe bien et appartient à $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Soit $x \in E$, et $X \in \mathcal{M}_{q,1}$ la matrice colonne de ses coordonnées dans la base (e_i) . Alors MX est la matrice-colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base (ε_i) , et $N(MX)$ est la matrice-colonne des coordonnées de $g(f(x))$ dans la base (ε'_i) . Par associativité, $N(MX) = (NM)X$, et par définition NM est donc la matrice de $g \circ f$ dans les bases (e_i) et (ε'_i) . \square

Corollaire 23

f est un isomorphisme si et seulement si sa matrice dans des bases quelconques \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E et F est inversible, et on a alors $\text{Mat}(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = (\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1}$.

Démonstration. Supposons f inversible; notons $A = \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $B = \text{Mat}(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Alors $AB = \text{Mat}(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = I_n$ et $BA = \text{Mat}(Id_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n$; d'où $B = A^{-1}$.

Réciproquement, si $A = \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est inversible, notons $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $A^{-1} = \text{Mat}(g, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Alors $f \circ g = Id_F$, et $g \circ f = Id_E$, d'où $g = f^{-1}$. \square

Théorème 26

Soient :

- \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 deux bases de E ;
- \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}'_2 deux bases de F ;
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = (P_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_2})^{-1} \times \text{Mat}(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}$$

Démonstration. Par définition, puis propriétés sur la matrice de la composée d'applications linéaires :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_2}^{-1} \times \text{Mat}(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1} &= P_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2} \times \text{Mat}(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1} \\ &= \text{Mat}(\text{Id}_F, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) \times \text{Mat}(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1) \\ &= \text{Mat}(\text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) \\ &= \text{Mat}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) \end{aligned}$$

□

Proposition 14

- f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E)$.
- f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$.
- **Conséquence :** si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $\dim E = \dim F$.

Démonstration. • Supposons f injective. On a vu qu'alors $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Nous allons montrer que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre. Soit en effet des réels λ_i tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = 0_F$. On peut écrire par linéarité $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = 0_F$, ce qui montre que le vecteur $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ appartient à $\text{Ker}(f)$. Il est donc nul : on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$. mais la famille (e_i) est libre (c'est une base) : on obtient bien que tous les λ_i sont nuls, et la famille $(f(e_i))$ est libre. On a donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = n = \dim(E)$.

Réciproquement, si $\text{rg}(f) = n$, montrons que f est injective : cela revient à montrer que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. On a évidemment $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f)$. Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \in \text{Ker}(f)$. $f(x) = 0$ donne par linéarité $\sum_{i=1}^n \mu_i f(e_i) = 0_F$. Or la famille $f(e_i)$ est génératrice de $\text{Im}(f)$, qui est de dimension n : cette famille est libre. On en déduit que les μ_i sont nuls, et donc que x est nul. On a bien montré $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

- f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$. Comme $\text{Im}(f)$ est un sev de F , on a $\text{Im}(f) = F$ ssi $\dim(F) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f)$. Ceci prouve l'équivalence.
- Évident avec les deux propositions précédentes.

□

Théorème du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E un espace vectoriel de dimension finie. On a

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$$

Démonstration. À suivre dans un DMbis...

□