TD2
Applications linéaires

Les bases

Exercice 1.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\operatorname{Mat}(f, \mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $f\big((x,y,z)\big)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que $\operatorname{Mat}(f, \mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $f(\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$ telle que $\operatorname{Mat}(f, \mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $f(\mathrm{P})$, où $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

4. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que la matrice de f dans les bases canoniques est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   Donner l'expression de $f\big((x,y)\big)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. (*)
Les applications suivantes sont-elle linéaires?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 3y, y-2x) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y, x^2) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+d, c-b) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P}(\mathrm{X}) & \longmapsto & \mathrm{XP}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}'(\mathrm{X}) \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AMB} \end{array} \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ fixées})$$

$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & {}^t(\mathrm{M} + \mathrm{I}_n) \end{array}$$

Exercice 3. (*) Dans cet exercice on admet la linéarité des applications introduites. Donner, pour chacune d'entre elles :

- La matrice dans les bases canoniques ;

- Le noyau (et une base de celui-ci s'il n'est pas réduit à 0), l'image (et une base de celle-ci en cas de non-surjectivité) et les dimensions de ces deux espaces ;
- Le caractère injectif /surjectif / bijectif.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (5x+y-3z, -x+y+z, 5x+2y-3z) \end{array}$$

On donnera la matrice de f_1 dans $\mathscr{B}_c(\mathbb{R}^3)$ puis dans la base $\mathscr{B} = \big\{(2,0,3),(1,0,1),(-1,1,-2)\big\}$.

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x+2y-4z, x-4y+6z, 2x+4z, x+5y-3z) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-2b+c & b-c \\ c-b & -2a+4b-2c \end{pmatrix} \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + {}^t\mathrm{M} \end{array}$$

On donnera la matrice de f_4 dans $\mathscr{B}_c(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ puis dans la base $\mathscr{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-2y+3z & -2x+4y+4t & z-t \\ z+2t & x-y & x+2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & 2\mathrm{P} - (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' \end{array} \qquad f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \big(\mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1), \mathrm{P}(-1)\big) \end{array}$$

$$f_8 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AM} \end{array} \quad \text{où } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(indic pour aller plus vite sur f_8: on pourra étudier l'inversibilité de A)

Exercice 4. **(*)** Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big((x,y)\big) = (2x-y, x+3y)$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Déterminer f^{-1}.

Études « concrètes » d'applications linéaires

Exercice 5. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}(x+y, x+y) \end{array}$

1. Montrer que φ est linéaire ; montrer que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi^n = \varphi$.
3. Soit $s = 2\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Donner la valeur de $s(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de s^n (on discutera suivant la parité de n).

Exercice 6. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall\, i \in \{1,2,3\},\ f(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad f(e_4) = e_1$$

1. Que vaut l'endomorphisme f^4 ? En déduire que f est un automorphisme, et donner f^{-1}.
2. Déterminer $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B})$.
3. Pour $i \in [\![1,3]\!]$ et $j \in [\![1,4]\!]$, calculer $f^i\left(e_j\right)$. En déduire, sans calcul matriciel, les matrices $\mathrm{M}^2, \mathrm{M}^3, \mathrm{M}^4$.

Exercice 7. Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$. f est-elle injective ? surjective ?

On note $u = (2, 1, -2)$.

2. Déterminer $v \in \mathbb{R}^3$ de la forme $(a, 1, b)$ tel que $f(v) = u$.
3. Déterminer $w \in \mathbb{R}^3$ de la forme $(c, 1, d)$ tel que $f(w) = v$.
4. Montrer que $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice B de f dans cette base (sans utiliser la matrice de passage !).
5. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u, v)$.
6. Donner la matrice de passage $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_c, \mathscr{B}}$ entre la base canonique et la base $\mathscr{B}$. Donner une relation entre A,B, et P ; la vérifier par le calcul.

Exercice 8. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, non nulle, telle que $f^2 = \widetilde{0}$.

1. Sans calcul : f est-il un automorphisme ?
2. Montrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
3. En déduire les dimensions de ces deux sous-espaces vectoriels.
4. Soit $u \in \mathbb{R}^3$, tels que $u \notin \mathrm{Ker}\, f$.
   (a) Montrer que $(u, f(u))$ est libre.
   (b) Montrer que $f(u) \in \mathrm{Ker}(f)$.
   (c) Montrer qu'il existe $v \in \mathrm{Ker}(f)$, non colinéaire à $f(u)$.
   (d) Montrer que $(u, f(u), v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (e) Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 9. On considère les éléments suivants de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $u = (1, -\sqrt{2}, 1)$, $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (1, \sqrt{2}, 1)$. On admet que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathscr{B}$.

1. Justifier que la matrice P est inversible.
2. Sans calculer P^{-1}, montrer que la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP}$ est une matrice diagonale D que l'on explicitera.
3. Calculer J^2, et exprimer J^2 en fonction de I et de K. En déduire que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{KP}$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

4. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On considère l'élément suivant de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & a+c & b\\ c & b & a\end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que M s'exprime simplement à l'aide de I, J, K et a, b, c.

   (b) En déduire que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

Exercice 10. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $u=(0,1,1)$, $v=(1,1,1)$ et $w=(1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$; on admet que $\mathscr{B}=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
4. Montrer que $f^2=3f-2\mathrm{Id}$. Retrouver les résultats de la question précédente à l'aide de cette égalité.
5. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^n=(2^n-1)\,f+(2-2^n)\,\mathrm{Id}$.

Plus théorique

Exercice 11. Soient $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $g\in\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Montrer que $g\circ f=\widetilde{0}\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,f\subset\mathrm{Ker}\,g$.

Exercice 12. Soit f un endomorphisme. Démontrer :

$$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0_{\mathrm{E}}\}$$

Exercice 13 (Noyaux itérés)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $p\in\mathbb{N}$, on note $\mathrm{N}_p=\mathrm{Ker}\left(f^p\right)$ et $\mathrm{I}_p=\mathrm{Im}\left(f^p\right)$.

1. Préciser les sev N_0 et I_0.
2. Montrer : $\forall\,p\in\mathbb{N},\ \mathrm{N}_p\subset\mathrm{N}_{p+1}$, et $\mathrm{I}_{p+1}\subset\mathrm{I}_p$.
3. En raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{N}_m=\mathrm{N}_{m+1}$.
4. Montrer alors que : $\forall\,n\geqslant m,\ \mathrm{N}_n=\mathrm{N}_m$.
5. Montrer que : $\forall\,n\geqslant m,\ \mathrm{I}_n=\mathrm{I}_m$.

Solutions

1 1. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\ y-z\\ x-z\end{pmatrix}$; d'où

$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f\big((x,y,z)\big) = (x-y,y-z,x-z)$$

2. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-2d\\ 2a+b+d\\ b-3c-d\\ a+b+2c+d\end{pmatrix}$.

En lisant cette dernière colonne comme les coordonnées d'une matrice 2×2 dans la base canonique il vient

$$\forall\,(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4, f\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a-2d & 2a+b+d\\ b-3c-d & a+b+2c+d\end{pmatrix}$$

3. Rappel : la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ s'ordonne usuellement par puissances croissantes. Ainsi dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathscr{B}_c = (1, X, X^2)$.

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+c\\ 2a-c\\ 3a+c\end{pmatrix}$ d'où :

$$\forall P = a+bX+cX^2\in\mathbb{R}_2[X],\ f(P) = (a+b+c)+(2a-c)X+(3a+c)X^2$$

4. $\begin{pmatrix}0 & 0\\ -4 & 4\\ 1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -4x+4y\\ x\\ -2y\end{pmatrix}$ d'où

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\big((x,y)\big) = (0,-4x+4y,x,-2y)$$

2 1. oui (démo usuelle, ou : f_1 est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$)

2. non (il y a un carré !). Par ex : $f((1,0)) = (0,1)$, et $f((2,0)) = (0,4) \neq 2f((1,0))$.
3. oui (démo usuelle)
4. oui (démo usuelle). Si P et Q sont deux polynômes on a $(\lambda P+Q)' = \lambda P' + Q'$ par linéarité de la dérivation.
5. oui (démo usuelle, $A(\lambda M+N)B = \lambda(AMB)+ANB$)
6. non (« terme constant » I_n). Par exemple, $f_6(0_n) = I_n \neq 0_n$ contredit la linéarité.

3 1. $\mathrm{Mat}(f_1,\mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ -1 & 1 & 1\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$ par construction « à vue » .

$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases}5x+y-3z=0\\ -x+y+z=0\\ 5x+2y-3z=0\end{cases}$. La résolution ne pose pas de problème et on trouve $\mathrm{Ker}(f_1) = \{(0,0,0)\}$, de dimension 0.

f_1 est donc injective ; c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc elle est aussi surjective et c'est un automorphisme. D'où $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ (surjectivité) et $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. On note ensuite $u = (2,0,3)$, $v = (1,0,1)$, $w = (-1,1,-2)$, et on trouve :

$$f_1(u) = (1,1,1) = u+w \quad , \quad f_1(v) = (2,0,2) = 2v \quad , \quad f_1(w) = (2,0,3) = u$$

ce qui donne par le procédé de construction usuel :

$$\mathrm{Mat}(f_1,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2. Par lecture directe : $\mathrm{Mat}(f_2,\mathscr{B}_c(\mathbb{R}^3),\mathscr{B}_c(\mathbb{R}^4)) = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & -4 & 6\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

$$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f_2) \Leftrightarrow \begin{cases}-x+2y-4z=0\\ x-4y+6z=0\\ 2x+4z=0\\ x+5y-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2z\\ y=z\end{cases}$$

par un pivot de Gauss sans difficulté particulière. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f_2) = \{(-2z,z,z) \mid z\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((-2,1,1)\big)$.
$\{(-2,1,1)\}$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f_2)$, constituée d'un vecteur non nul, donc est une base de $\mathrm{Ker}(f_2)$ qui est donc de dimension 1.
Le théorème du rang donne $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f_2)) + \dim(\mathrm{Im}(f_2))$ d'où $\dim(\mathrm{Im}(f_2)) = 2$.
On peut par exemple lire les colonnes de la matrice pour voir

$$\mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Vect}\big((-1,1,2,1),(2,-4,0,5),(4,6,4,-3)\big)$$

Cet espace étant de dimension 2, la famille ci-dessus est liée. On peut alors remarquer que $\{(-1,1,2,1),(2,-4,0,5)\}$ est une famille libre (2 vecteurs non colinéaires) de $\mathrm{Im}(f_2)$ qui est de dimension 2 : c'est une base de $\mathrm{Im}(f_2)$.
$\mathrm{Ker}(f_2)$ n'étant pas réduit à 0, f_2 n'est pas injective ; $\mathrm{Im}(f_2)$ est de dimension 2 donc n'est pas égale à $\mathbb{R}^4$, donc f_2 n'est pas surjective.

3. On construit ici la matrice en calculant les images des 4 vecteurs de la base canonique :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $f_3(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_4$ donc la première colonne de la matrice est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. En procédant de même avec e_2, e_3, e_4 :

$$\mathrm{Mat}\,(f_3, \mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour le noyau on écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(f_4) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ b - c = 0 \\ c - b = 0 \\ -2a + 4b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$$

donc $\mathrm{Ker}\,(f_4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & d \end{pmatrix} \mid (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ Ces deux matrices sont libres car non colinéaires donc on a une base de $\mathrm{Ker}\,(f_4)$, et $\dim(\mathrm{Ker}\,(f_4)) = 2$.
Par théorème du rang avec $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ on en déduit $\dim(\mathrm{Im}\,(f_4)) = 2$: pour avoir une base de $\mathrm{Im}\,(f_4)$ il suffit de trouver deux matrices de cet espace formant une famille libre. On choisit par exemple $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (peut aussi se lire dans les deux premières colonnes de la matrice).
f_4 n'est ni injective (noyau de dimension $2 > 0$), ni surjective (c'est un endo : si elle était surjective elle serait aussi injective !)

4. Avec $f_4\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$ on trouve $\mathrm{Mat}\,(f_4, \mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Si on note $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4$ les 4 matrices de la base proposée, on trouve

$$f(\mathrm{M}_1) = 2\mathrm{M}_1 \; ; \; f(\mathrm{M}_2) = 2\mathrm{M}_2 \; ; \; f(\mathrm{M}_3) = 2\mathrm{M}_3 \; ; \; f(\mathrm{M}_4) = 0$$

ce qui donne

$$\mathrm{Mat}\,(f_4, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment on trouve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(f_4) \Leftrightarrow a = d = 0, b = -c$ d'où $\mathrm{Ker}\,(f_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Ce noyau est de dimension 1 ; le théorème du rang montre alors que $\mathrm{rg}\,(f_4) = 3$ et

$$\mathrm{Im}\,(f_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

(NB : c'est l'ensemble des matrices 2×2 symétriques).
f_4 n'est ni injective (noyau non nul) ni surjective (image différente de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5. On va ici d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension 6.
$f_5((1,0,0,0)) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc la première colonne de la matrice de f_5 est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et en procédant de même avec les 3 autres vecteurs de base :

$$\mathrm{Mat}\,(f_5, \mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(x, y, z, t) = 0_{2,3}$ donne 6 équations linéaires ; on a notamment $z - t = 0$ et $z + 2t = 0$ d'où on tire $z = t = 0$; puis $x - y = 0$ et $x - 2y + 3z = 0$ permettent de conclure à $x = y = 0$ également. Ainsi $\mathrm{Ker}\,(f_5) = \{(0,0,0,0)\}$ et f_5 est injective.
Le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}\,(f_5)) = 4 < \dim(\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}))$ donc f_5 n'est pas surjective.
Enfin $\mathrm{Im}\,(f_5)$ est engendrée par les images des 4 vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$; la famille génératrice alors obtenue est de cardinal 4 dans un espace de dimension 4 ($\mathrm{Im}\,(f_5)$) donc est une base de $\mathrm{Im}\,(f_5)$.

6. La base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est $\mathscr{B}_c = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$. On a

- $f_6(1) = 2-(X-1)\times 0 = 2$
- $f_6(X) = 2X-(X-1)\times 1 = 1+X$
- $f_6(X^2) = 2X^2-(X-1)\times 2X = 2X$

d'où en rangeant les coordonnées dans $\mathscr{B}_c$ de ces trois images dans une matrice :

$$\mathrm{Mat}(f_6,\mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Pour le noyau on peut (pour changer) procéder matriciellement, et déterminer Ker (A) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow A\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=x \end{cases}$$

d'où $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On « traduit » ensuite en polynômes : $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la colonne de coordonnées de $1-2X+1.X^2$; d'où $\mathrm{Ker}(f_6) = \mathrm{Vect}(1-2X+X^2)$ (famille génératrice à un polynôme non nul, donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(f_6)$).
f_6 n'est pas injective ; avec le thm du rang et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ on en conclut que f_6 est de rang 2.
On peut donc écrire que $\mathrm{Im}(f_6) = \mathrm{Vect}(2, 1+X, 2X)$ et on voit en fait rapidement que $\mathrm{Im}(f_6) = \mathrm{Vect}(1,X) = \mathbb{R}_1[X]$. f_6 n'est pas surjective.

7. Si P est le polynôme constant égal à 1, on a $f_7(P) = (1,1,1)$ (l'image de n'importe quel réel est 1 !!)
Si $P = X$ on a pour tout x, $P(x) = x$ donc $f_7(P) = (0,1,-1)$; enfin si $P = X^2$ on a $f_7(P) = (0,1,1)$ et si $P = X^3$, $f_7(P) = (0,1,-1)$.
D'où $\mathrm{Mat}(f_7,\mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
De manière générale, si $P = a+bX+cX^2+dX^3$ on a $f_7(P) = (a, a+b+c+d, a-b+c-d)$.
$f_7(P) = (0,0,0)$ ssi $a=0, c=0$ et $d=-b$ ce qui donne $\mathrm{Ker}(f_7) = \{bX-bX^3 | b\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X-X^3)$; de dimension 1 et donc f_7 n'est pas injective.
D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f_7)$ est de dimension 3 ; c'est un sev de $\mathbb{R}^3$ donc c'est en fait $\mathbb{R}^3$ tout entier et f_7 est surjective.
8. On calcule les images des 4 matrices de la base canonique :

   - $A\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
   - $A\times\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
   - $A\times\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
   - $A\times\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

   d'où, en contruisant colonne par colonne :

$$\mathrm{Mat}(f_8,\mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Pour le noyau, on peut procéder comme d'habitude ou suivre l'indication pour un raccourci : A est de déterminant non nul donc est inversible. Si $M\in\mathrm{Ker}(f_8)$, on a $AM = 0_2$ et en multipliant par A^{-1} on obtient $M = 0_2$: d'où $\mathrm{Ker}(f_8) = \{0_2\}$ et f_8 est injective ; comme c'est un endomorphisme elle est aussi surjective et bijective.

4 Linéarité par démo usuelle.
On montre que f est injective en étudiant son noyau :

$$u = (x,y)\in\mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f((x,y)) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

par résolution sans difficulté du système. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$: f est injective. Étant un endomorphisme injectif, il est aussi bijectif.
Pour la détermination de la bijection réciproque : pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on cherche à déterminer l'unique antécédent (x,y) de (a,b) ; donc à résoudre le système $f((x,y)) = (a,b)$ d'inconnues x et y. On obtient :

$$\begin{cases} 2x-y=a \\ x+3y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3a+b}{7} \\ y = \dfrac{-a+2b}{7} \end{cases}$$

$\left(\dfrac{3a+b}{7}, \dfrac{-a+2b}{7}\right)$ est donc l'unique antécédent de (a,b) par f. On a ainsi l'expression de la bijection réciproque :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, f^{-1}((a,b)) = \left(\frac{3a+b}{7}, \frac{-a+2b}{7}\right)$$

On peut également (c'est mieux !) utiliser les matrices : f est un automorphisme donc $\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$ est donc inversible, et $\mathrm{Mat}(f^{-1},\mathscr{B}_c) = A^{-1}$.

Avec les méthodes usuelles on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$; f^{-1} est l'application linéaire canoniquement associée à cette matrice donc on a

$$f^{-1}((a,b)) = \left(\frac{3}{7}a + \frac{1}{7}b, -\frac{1}{7}a + \frac{2}{7}b\right)$$

5

1. f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc est linéaire.
   On peut remarquer que la matrice représentative de $\varphi \circ \varphi$ est A^2. Un calcul rapide montre que $A^2 = A$; donc $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
2. Par récurrence : c'est vrai de manière évidente pour $n = 1$, et si $\varphi^n = \varphi$, alors $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n = \varphi \circ \varphi = \varphi$ ce qui donne l'hérédité.
3. $s((x,y)) = 2\varphi((x,y)) - \mathrm{Id}((x,y)) = (x+y, x+y) - (x,y) = (y,x)$.
4. **Indications :** regarder s, s^2, s^3, ... et essayer de trouver un motif ; le démontrer ensuite (il existe diverses méthodes)

6

1. **Indications :** calculer les images des vecteurs de la base canonique. Puis reconnaître une propriété $f \circ (\ldots) = \mathrm{Id}$.

7

1. De $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+10y+7z \\ x+4y+3z \\ -2x-8y-6z \end{pmatrix}$ on tire
   $$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f((x,y,z)) = (2x+10y+7z, x+4y+3z, -2x-8y-6z)$$
   $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$ ssi $f((x,y,z)) = (0,0,0)$: un résolution du système montre que ceci équivaut à $\begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases}$; d'où $\mathrm{Ker}(f) = \{(2y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2,1,-2))$.
   Ce noyau n'est pas réduit à 0 donc f n'est pas injective. f est un endo ; si elle était surjective elle serait aussi bijective, ce qui n'est pas le cas. f n'est pas surjective.
2. Avec l'expression précédente, $f((a,1,b)) = (2a+10+7b, a+4+3b, -2a-8-6b)$; on cherche alors a et b solutions du système
   $$\begin{cases} 2a+10+7b = 2 \\ a+4+3b = 1 \\ -2a-8-6b = -2 \end{cases}$$
   et on trouve $a = 3$, $b = -2$.
   $v = (3,1,-2)$ convient.
3. Même méthode : on cherche c et d solutions du système
   $$\begin{cases} 2c+10+7d = 3 \\ c+4+3d = 1 \\ -2c-8-6d = -2 \end{cases}$$
   et on trouve $c = 0, d = -1$: $w = (0,1,-1)$ convient.
4. Famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Les questions précédentes donnent $f(u) = 0$ ($\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$!!), $f(v) = u$ et $f(w) = v$; d'où $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. Avec la proposition usuelle, mais dans la base $\mathscr{B}$: $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(u), f(v), f(w)) = \mathrm{Vect}(0, u, v) = \mathrm{Vect}(u, v)$.
6. En rangeant les coordonnées de u, v, et w dans une matrice :
   $$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
   La formule du changement de base donne $B = P^{-1}AP$. Par la méthode de votre choix on trouve
   $$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8

1. Non. Si f était un automorphisme, on aurait sa réciproque f^{-1}, et alors en composant :
   $$f^2 = \tilde{0} \Rightarrow (f^{-1})^2 \circ f^2 = \tilde{0} \Rightarrow \mathrm{Id} = \tilde{0}$$
   ce qui est absurde.
   f n'est donc pas un automorphisme.
2. Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = f(y)$.
   On a alors $f(x) = f(f(y)) = f^2(y) = (0,0,0)$ car f^2 est l'endomorphisme nul ; d'où $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
   On a bien montré que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

3. Par théorème du rang
$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f))$$
et de plus d'après l'inclusion précédente, $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,(f))$.
Il n'y a donc que deux possibilités : $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 3$ (mais alors f est l'endomorphisme nul, ce qui est exclu) ou
$$\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 1 \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 2$$

4. (a) $f(u)$ est dans $\mathrm{Im}\,(f)$, donc dans $\mathrm{Ker}\,(f)$ d'après 2 ;
Et u n'est pas dans $\mathrm{Ker}\,(f)$;
Il est donc impossible que u et $f(u)$ soient colinéaires.
On en déduit que $(u, f(u))$ est libre.

<u>2ème solution</u> : soient λ_1, λ_2 réels tq $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) = 0$.
On a alors $f(\lambda_1 u + \lambda_2 f(u)) = f(0) = 0$; et donc par linéarité $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) = 0$; donc $\lambda_1 f(u) = 0$.
Mais comme $u \notin \mathrm{Ker}\,(f)$, $f(u) \neq 0$ et donc $\lambda_1 = 0$.
Donc en reprenant l'équation de départ, on a $\lambda_2 f(u) = 0$, et donc $\lambda_2 = 0$.
On a donc montré que $(u, f(u))$ est libre.

(b) $f(u) \in \mathrm{Im}\,(f)$ donc $f(u) \in \mathrm{Ker}\,(f)$ d'après la question 2.

(c) On a vu que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est de dimension 2.
Si tous les vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(f)$ étaient colinéaires à $f(u)$, $\mathrm{Ker}\,(f)$ serait égal à $\mathrm{Vect}\,(f(u))$, donc de dimension 1 ; ce qui n'est pas.
Il existe donc $v \in \mathrm{Ker}\,(f)$, non colinéaire à $f(u)$.

(d) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) = 0 + \lambda_3 v = 0$.
En appliquant f comme en 4a, on a $\lambda_1 f(u) = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$.
On obtient donc $\lambda_2 f(u) = 0 + \lambda_3 v = 0$; et comme $(f(u), v)$ sont non colinéaires, ils forment une famille libre ; d'où $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Tous les λ_i sont nuls : la famille $(u, f(u), v)$ est libre. Or cette famille est de cardinal 3, et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$; donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) On a :
- $f(u) = 0.u + 1.f(u) + 0.v$
- $f(f(u)) = 0$ (car $f^2 = \tilde{0}$)
- $f(v) = 0$ (car $v \in \mathrm{Ker}\,(f)$)

On obtient donc la matrice de f dans la base $(u, f(u), v)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9 1. P est la matrice de la famille (u, v, w) dans $\mathscr{B}_c$. Comme cette famille est une base, on a P inversible.

2. $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP}$ est la matrice de l'endomorphisme j canoniquement associé à J, dans la base $\mathscr{B} = (u, v, w)$.
Calculons $j(u)$, en utilisant la matrice :
$$\mathrm{J} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc $j(u) = -\sqrt{2}u$. De même on trouve $j(v) = 0$ et $j(w) = \sqrt{2}w$.
On conclut de tout cela que $\mathrm{Mat}\,(j, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Cette matrice est égale à $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP}$ par formule du changement de base.

3. $\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I} + \mathrm{K}$.

On écrit ensuite $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{KP} = \mathrm{P}^{-1}\left(\mathrm{J}^2 - \mathrm{I}\right)\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{J}^2\mathrm{P} - \mathrm{I} = \left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP}\right)^2 - \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(NB : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP}\right)^n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{J}^n\mathrm{P}$ à savoir montrer par récurrence).

4. (a) Assez clairement $\mathrm{M} = a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}$.

(b) Par calculs sans difficulté :
$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = a\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} + b\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP} + c\mathrm{P}^{-1}\mathrm{KP} = \begin{pmatrix} a - \sqrt{2}b + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a + \sqrt{2}b + c \end{pmatrix}$$

10 1. En procédant matriciellement : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; d'où $f(u) = u$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; d'où $f(v) = v$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; d'où $f(w) = 2w$

2. Par le procédé de construction usuel la question précédente donne $\operatorname{Mat}(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Cette dernière matrice est inversible (diagonale, coeff diagonaux non nuls) ; donc f est un automorphisme. En inversant la matrice : $\operatorname{Mat}(f^{-1}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

4. On peut toujours travailler dans la base $\mathscr{B}$.Si on note $A = \operatorname{Mat}(f, \mathscr{B})$, on a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et on voit que $A^2 = 3A - 2I_3$; ce qui permet bien de conclure que $f^2 = 3f - 2\mathrm{Id}$.
(NB : on peut travailler avec la matrice M, ou avec l'expression de $f((x, y, z))$ mais c'est bien plus pénible !!!)
$f^2 = 3f - 2\mathrm{Id}$ s'écrit aussi $2\mathrm{Id} = 3f - f^2$ ou encore $\mathrm{Id} = f \circ \left(\frac{3}{2}\mathrm{Id} - \frac{1}{2}f\right)$.
En posant $g = \frac{3}{2}\mathrm{Id} - \frac{1}{2}f$ on a $f \circ g = \mathrm{Id}$ donc f est un automorphisme et $g = f^{-1}$.
De plus $\operatorname{Mat}(f^{-1}, \mathscr{B}) = \frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A$ (en se plaçant dans la base $\mathscr{B}$). On retrouve l'expression de $\operatorname{Mat}(f^{-1}, \mathscr{B})$ déjà obtenue à la question précédente.

5. Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$ la propriété s'écrit $f^0 = \mathrm{Id}$ ce qui est vrai par convention.
Supposons maintenant $f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\mathrm{Id}$. Alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1} = f^n \circ f &= \left((2^n - 1)f + (2 - 2^n)\mathrm{Id}\right) \circ f \\ &= (2^n - 1)f^2 + (2 - 2^n)f \\ &= (2^n - 1)(3f - 2\mathrm{Id}) + (2 - 2^n)f \\ &= \left(3(2^n - 1) + (2 - 2^n)\right)f + \left(2 - 2^{n+1}\right)\mathrm{Id} \\ &= \left(2^n(3 - 1) + 2 - 3\right)f + \left(2 - 2^{n+1}\right)\mathrm{Id} \\ &= \left(2^{n+1} - 1\right)f + \left(2 - 2^{n+1}\right)\mathrm{Id} \end{aligned}$$

ce qui montre l'hérédité et achève la récurrence.

11 Indications :
double inclusion ; il faut juste traduire les hypothèses et savoir ce qu'on veut démontrer !

12 Indications :

$\Rightarrow$: en prenant $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$ on introduit assez rapidement un vecteur de $\operatorname{Ker}(f^2)$...

$\Leftarrow$: pour $\operatorname{Ker}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f)$: si $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$, que dire de $f(x)$?

13 Indications :

1.
2.
3. Si F_1 et F_2 sont tels que $F_1 \subset F_2$, et $F_1 \neq F_2$, que dire de leurs dimensions ? La suite des noyaux peut-elle alors « croître strictement » indéfiniment ?
4. Récurrence ; si $x \in N_{n+1}$, à quoi appartient $f(x)$?
5. Commencer par montrer une inclusion ; puis.....