ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Programme de colle n°2
Semaine du 25/09

Espaces vectoriels - Applications linéaires

Pour cette semaine, tous les exercices étoilés de la feuille de TD1 sont exigibles.
À partir de jeudi on peut ajouter ceux de la feuille de TD2.

On se limite aux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants (dits *de référence*) : $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[x]$.

Généralités

- Définition (les axiomes ont été donnés mais ne sont pas exigibles, on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel en montrant que c'est un sev d'un des espaces de référence).
- Espace $\mathbb{R}_n[x]$:
  - On identifie les fonctions polynomiales et les polynômes. La notation avec les X^k est privilégiée.
  - Résultats utiles : deux polynômes sont égaux ssi ils ont les mêmes coefficients ; a est racine de P ssi P peut se factoriser par $(X - a)$; si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ a $n+1$ racines distinctes, c'est le polynôme nul.
- Combinaison linéaire, sous-espace vectoriel.
- Espace engendré par une famille finie de vecteurs.
- Famille génératrice, famille libre, base. Coordonnées. Bases canoniques des espaces de référence.
- Caractérisation des familles libres dans le cas de familles à 1 vecteur ; à 2 vecteurs.

Théorie de la dimension

- On appelle dimension de E, le cardinal commun de toutes les bases.
- Toute famille libre de E a un cardinal $\leqslant \dim(E)$; toute famille génératrice de E a un cardinal $\geqslant \dim(E)$. Contraposées de ces propositions.
- Toute famille de cardinal $\dim(E)$ est une base ssi elle est libre ; ssi elle est génératrice.
- Dimension d'un sev. Si E et F sont deux espaces vectoriels, $E = F \Leftrightarrow \big(F \subset E \text{ et } \dim(E) = \dim(F)\big)$.
- Rang d'une famille de vecteurs : définition ; cas où la famille est libre. Rang d'une matrice. $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$ (résultat admis) ; conséquence : le rang des lignes de M est aussi celui de ses colonnes.

Applications linéaires

f désigne une application linéaire de E dans F.

- Définition de la linéarité. Conséquences immédiates : $f(0_E) = 0_F$; l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.
- Vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
- Noyau et image d'une application linéaire. Ce sont des sev, respectivement de E et de F.
  Noyau et image d'une matrice.
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective ssi $\mathrm{Ker}\big(f\big) = \big\{0_E\big\}$.
- Matrice d'une application linéaire. Méthode de construction de cette matrice. Utilisation de cette matrice (calcul d'images par f, recherche du noyau, etc.).
  Les étudiants doivent savoir passer des vecteurs aux coordonnées, et réciproquement, pour mener de tels calculs.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Propriétés : matrice de $f \circ g$, de f^n, de f^{-1}. $f \in \mathscr{L}(E)$ est un automorphisme ssi sa matrice dans une base quelconque est inversible.
- Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Conséquence : entre espaces de même dimension (et en particulier pour les endomorphismes), injectivité $\Leftrightarrow$ bijectivité, et surjectivité $\Leftrightarrow$ bijectivité.
  Le rang de f est celui de sa matrice dans des bases quelconques.

  NB : le théorème du rang sur une matrice n'est pas au programme ; il faut se ramener à l'application linéaire canoniquement associée.

Sera vu lundi, donc à éviter avant jeudi :

- Matrice de passage, formule de changement de base, matrices semblables.
- $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi elle est de rang n.