Devoir maison n°1
Corrigé

Exercice 1

Soient les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(A, B, C, D)$.

1. **Montrer que la famille (A, B, C, D) est liée. Qu'en déduire sur $\dim \mathscr{F}$?**

   Il s'agit de trouver une relation de liaison, *ie* une combinaison linéaire nulle des matrices A,B,C,D qui ne soit pas triviale.
   Il n'est pas évident d'en trouver « à vue » ; cherchons donc des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que

   $$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   En examinant les coefficients de la matrice $\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D$, on obtient que cette matrice est nulle ssi :

   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

   Un pivot de Gauss fournit :

   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_4 \\ \lambda_2 = -3\lambda_4 \\ \lambda_3 = 2\lambda_4 \end{cases}$$

   Ce système admet des solutions non nulles : par exemple $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1$. La famille est donc liée.
   De plus les coefficients précédents permettent d'écrire $D = A + 3B - 2C$; d'où $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(A, B, C, D) = \mathrm{Vect}(A, B, C)$; et $\dim(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(A, B, C) \leqslant 3$.

   Indispensables de la question :

   - Dire que l'équation $\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet des solutions non nulles.
   - Écrire que $\mathscr{F}$ est engendré par 3 vecteurs pour en déduire $\dim(\mathscr{F}) \leqslant 3$.

---

2. **Montrer que $\{A, B, C\}$ est une base de $\mathscr{F}$. Donner le rang de la famille $\{A, B, C, D\}$.**

   La solution non nulle du système donnée ci-dessus fournit la relation de liaison $-A - 3B + 2C + D = 0$; on peut donc par exemple écrire $D = A + 3B - 2C$, ce qui implique que $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(A, B, C, D) = \mathrm{Vect}(A, B, C)$ et $\{A, B, C\}$ est génératrice de $\mathscr{F}$. Il reste donc à montrer que la famille $\{A, B, C\}$ est libre.

On cherche alors les solutions de l'équation $\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; cette équation équivaut au système traité précédemment, avec $\lambda_4 = 0$. En reprenant les calculs, on trouve directement

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La famille $\{A, B, C\}$ est libre : c'est donc une base de $\mathscr{F}$. Cette base étant de cardinal 3, on a $\dim(\mathscr{F}) = 3$.

Indispensables de la question :

- Montrer que la famille (A, B, C), qu'on sait génératrice de $\mathscr{F}$, est libre.
- Écrire que $\dim(\mathscr{F})$ est le cardinal de la base de $\mathscr{F}$ obtenue.

---

3. **La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathscr{F}$? Si oui, donner ses coordonnées dans la base $\{A, B, C\}$.**

On recherche cette fois l'existence (et leur valeur, s'ils existent) de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels tels que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$. Ceci équivaut au système

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = -2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

dont la résolution donne :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = -2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \textbf{(*)} \\ \lambda_3 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

(notons que les trois valeurs sont connues sans avoir besoin de l'équation **(*)** ; il faut par contre que cette équation soit vérifiée, faut de quoi le système n'admettrait pas de solution).

Donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{F}$, et on a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = B - 2C$ (prendre le temps de vérifier ce calcul...).

La colonne des coordonnées de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\{A, B, C\}$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Indispensables de la question :

- Cette matrice est dans $\mathscr{F}$ ssi elle est combinaison linéaire des vecteurs de base.
- Après avoir montré que cette combinaison existe, reconnaître les coordonnées : ce sont les λ_i.

---

4. **Montrer que** $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle|\; x+z = y-2t \right\}$**.**

   Notons $\mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle|\; x+z = y-2t \right\}$.

   De manière classique, on a (par exemple) :

$$\mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle|\; x+z = y-2t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y-2t-z & y \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, t \text{ réels} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

   Un système immédiat à résoudre montre que la famille $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est libre, donc c'est une base de G, et $\dim(\mathrm{G}) = 3 = \dim(\mathscr{F})$.

   On montre ensuite que $\mathscr{F} \subset \mathrm{G}$: en effet, A,B,C sont des éléments de G (leurs coefficients vérifient bien $x+z = y-2t$) ; G étant un sev, on a donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \subset \mathrm{G}$.

   Par inclusion et égalité des dimensions, on a $\mathscr{F} = \mathrm{G}$.

   Indispensables de la question :

   - Montrer $\mathscr{F} \subset \mathrm{G}$ en vérifiant que les éléments de la base de $\mathscr{F}$ sont dans G.
   - Signaler que G est un sev pour obtenir que $\mathscr{F} \subset \mathrm{G}$.
   - On peut faire une double inclusion, mais le sens $\mathrm{G} \subset \mathscr{F}$ est plus compliqué...
   - Sinon, on détermine dim(G) en en donnant une base par les techniques habituelles.
   - Dire que $\dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathscr{F})$ et $\mathscr{F} \subset \mathrm{G}$ pour conclure $\mathscr{F} = \mathrm{G}$.

Exercice 2

On admet le résultat suivant : $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ***est inversible ssi elle est de rang*** n***.***

On considère, pour $a \in \mathbb{R}$**,** $\mathrm{M}(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$**.**

1. **Soit** $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$**. Calculer** J^2**. En déduire**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{M}(a)\mathrm{M}(b) = \mathrm{M}(a+b-3ab)$$

   Un calcul sans difficulté montre :

$$\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3\mathrm{J}$$

   On remarque ensuite que : $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathrm{M}(a) = \mathrm{I}_3 + a\mathrm{J}$; de sorte que

$$\begin{aligned} \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{M}(a)\mathrm{M}(b) &= (\mathrm{I}_3 + a\mathrm{J})(\mathrm{I}_3 + b\mathrm{J}) \\ &= \mathrm{I}_3 + (a+b)\mathrm{J} + ab\mathrm{J}^2 \\ &= \mathrm{I}_3 + (a+b)\mathrm{J} - 3ab\mathrm{J} \\ &= \mathrm{I}_3 + (a+b-3ab)\mathrm{J} \\ &= \mathrm{M}(a+b-3ab) \end{aligned}$$

   Indispensables de la question :

- Calculer...

---

2. **Que vaut** $\mathrm{M}(0)$ **? En déduire que, pour** $a \neq \dfrac{1}{3}$**,** $\mathrm{M}(a)$ **est inversible ; et donner son inverse (on le cherchera sous la forme** $\mathrm{M}(a')$**, où** a' **est à déterminer).** $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ **est-elle inversible ?**

$\mathrm{M}(0) = \mathrm{I}_3$.
Fixons $a \neq \dfrac{1}{3}$. On recherche une matrice N telle $\mathrm{M}(a)\mathrm{N} = \mathrm{I}_3 = \mathrm{M}(0)$. Si on cherche N sous la forme $\mathrm{M}(a')$, on cherche alors a' tel que $\mathrm{M}(a)\mathrm{M}(a') = \mathrm{M}(0)$. Ceci sera vrai, d'après la question précédente, si $a + a' - 3aa' = 0$, soit encore $a' = \dfrac{a}{3a-1}$ (possible car $3a - 1 \neq 0$).

Pour résumer, on a montré :

$$\forall\, a \neq \frac{1}{3},\ \mathrm{M}(a)\mathrm{M}\left(\frac{a}{3a-1}\right) = \mathrm{M}(0) = \mathrm{I}_3$$

donc $\mathrm{M}(a)$ est inversible, d'inverse $\mathrm{M}\left(\dfrac{a}{3a-1}\right)$.

Pour $a = 1/3$: $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ est non nulle, avec 3 colonnes colinéaires, donc de rang $1 \neq 3$, donc non inversible d'après le résultat admis.

Indispensables de la question :

- Écrire qu'on cherche a' tel que $\mathrm{M}(a)\mathrm{M}(a') = \mathrm{I}_3 = \mathrm{M}(0)$.
- Après résolution, conclure $\mathrm{M}(a)\mathrm{M}\left(\dfrac{a}{3a-1}\right) = \mathrm{I}_3$ et conclure, ici seulement, que $\mathrm{M}(a)$ est inversible, d'inverse $\mathrm{M}\left(\dfrac{a}{3a-1}\right)$.
- Donner la bonne justification pour $\mathrm{rg}\left(\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = 1$.

---

3. **On suppose maintenant** $a \neq 0$**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **la suite telle que :** $u_0 = 0$**, et :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a + (1-3a)u_n$**. Montrer :**

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}(a)^n = \mathrm{M}(u_n)$$

On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : pour $n = 0$, la propriété s'écrit : $\mathrm{M}(u_0) = \mathrm{M}(a)^0 = \mathrm{I}_3$: cette propriété est vraie car $u_0 = 0$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé : on suppose que la propriété est vraie au rang n : on a $\mathrm{M}(u_n) = \mathrm{M}(a)^n$. Alors

$$\mathrm{M}(a)^{n+1} = \mathrm{M}(a)^n \times \mathrm{M}(a) = \mathrm{M}(u_n) \times \mathrm{M}(a) = \mathrm{M}(u_n + a - 3au_n) = \mathrm{M}(a + (1-3a)u_n) = \mathrm{M}(u_{n+1})$$

  ce qui donne bien la propriété au rang $n+1$: la propriété est héréditaire.
- On a donc bien : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}(u_n) = \mathrm{M}(a)^n$.

Indispensables de la question :

- Rédiger proprement la récurrence. Dire que $u_0 = 0$ pour initialiser correctement.

4. **Donner l'expression explicite de u_n pour tout n. En déduire une expression explicite de $\mathrm{M}(a)^n$.**

   On recherche maintenant l'expression explicite de u_n : il s'agit du terme général d'une suite arithmético-géométrique. La méthode est donc connue :

   - On recherche le « point fixe » : α tel que $\alpha = a + (1-3a)\alpha$. On obtient $\alpha = \dfrac{a}{3a} = \dfrac{1}{3}$.
   - On pose $v_n = u_n - \alpha = u_n - \dfrac{1}{3}$; on a alors :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = a + (1-3a)u_n - \frac{1}{3} = (1-3a)\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = (1-3a)v_n$$

   La suite (v_n) est géométrique, de raison $(1-3a)$: on a donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0(1-3a)^n$; ce qui donne

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n - \frac{1}{3} = (1-3a)^n\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)$$

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}(1-(1-3a)^n)$$

   et donc finalement : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}(a)^n = \mathrm{M}\left(\dfrac{1}{3}(1-(1-3a)^n)\right)$.

   Indispensables de la question :

   - Écrire qu'on a une suite arithmético-géométrique, et appliquer correctement la méthode connue.

---

5. **On considère maintenant les trois suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par :**

   - $u_0 = 1,\ v_0 = w_0 = 0$.
   - $\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$.

   On pose $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) **Déterminer la matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$.

   On lit sur les relations de récurrence :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

   donc $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

   Indispensables de la question :

   - Donner la bonne matrice...

(b) **Montrer :** $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = A^n U_0$.

erratum : lire $U_n = A^n U_0$

Récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, la propriété s'écrit $U_0 = A^0 U_0$. Comme $A^0 = I_3$ cette propriété est vraie.
- Si, pour un n fixé, $U_n = A^n U_0$, alors

$$U_{n+1} = AU_n = A\big(A^n U_0\big) = A^{n+1} U_0$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$. Elle est donc héréditaire.
- Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$.

Indispensables de la question :

- Ne pas oublier $A^0 = I_3$ pour une initialisation correcte.
- Tenir un raisonnement par récurrence propre malgré la facilité de la question.

(c) **En déterminant le a tel que $A = M(a)$, déterminer l'expression de u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.**

On a clairement $A = M(1)$.

Avec la formule trouvée en question 4 appliquée à $a = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = M(1)^n = M\left(\frac{1}{3}(1-(-2)^n)\right) = \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{3}(1-(-2)^n) & \frac{1}{3}(1-(-2)^n) & \frac{1}{3}(1-(-2)^n) \\ \frac{1}{3}(1-(-2)^n) & 1-\frac{2}{3}(1-(-2)^n) & \frac{1}{3}(1-(-2)^n) \\ \frac{1}{3}(1-(-2)^n) & \frac{1}{3}(1-(-2)^n) & 1-\frac{2}{3}(1-(-2)^n) \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite $U_n = A^n \times U_0 = A^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: ceci renvoie la première colonne de M.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{3}(1-(-2)^n) \\ \frac{1}{3}(1-(-2)^n) \\ \frac{1}{3}(1-(-2)^n) \end{pmatrix}$$

et en isolant la première composante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1-\frac{2}{3}(1-(-2)^n)$$

Indispensables de la question :

- Calculer correctement...

Exercice 3

On rappelle le résultat essentiel suivant sur les polynômes : soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Si P admet (au moins) $n+1$ racines deux à deux distinctes, alors c'est le polynôme nul.

1. **Soient** P **et** Q **deux polynômes de** $\mathbb{R}_2[X]$ **tels que :** $P(0) = Q(0)$ **;** $P(1) = Q(1)$ **;** $P(2) = Q(2)$**. Montrer que** $P = Q$**.**

   On pose $R = P - Q$. Comme P et Q sont dans $\mathbb{R}_2[X]$, R l'est également ($\mathbb{R}_2[X]$ est un sev).
   De plus, $R(0) = P(0) - Q(0) = 0$, et de même $R(1) = R(2) = 0$.
   R admet donc 3 racines ; d'après le résultat rappelé en préambule, c'est le polynôme nul.
   De $P - Q = 0$ on tire finalement $P = Q$.

Indispensables de la question :

- Introduire $P-Q$.
- Vérifier soigneusement qu'on est dans les conditions d'application du résultat rappelé : dire que $P-Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et qu'il a 3 racines.

Soient les polynômes suivants : $L_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$**,** $L_1 = -X(X-2)$**,** $L_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$**.**

2. **Calculer les** $L_i(j)$ **pour** $(i,j) \in [\![0,2]\!]^2$**.**

   Il suffit de remplacer : on trouve par exemple $L_0(0) = \frac{1}{2}(0-1)(0-2) = 1$. Avec des calculs similaires :

   $$L_0(0) = 1 \ , \ L_0(1) = 0 \ , \ L_0(2) = 0$$

   $$L_1(0) = 0 \ , \ L_1(1) = 1 \ , \ L_1(2) = 0$$

   $$L_2(0) = 0 \ , \ L_2(1) = 0 \ , \ L_2(2) = 1$$

   Indispensables de la question :

   - Calcul...

---

3. **En utilisant la question 1, montrer :** $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$**. Qu'a-t-on montré sur la famille** (L_0, L_1, L_2) **?**

   On cherche à démontrer l'égalité des polynômes P et $Q = \big(P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2\big)$. En suivant l'indication, on calcule la valeur en 0 de ces deux polynômes. On a notamment

   $$Q(0) = P(0)L_0(0) + P(1)L_1(0) + P(2)L_2(0) = P(0)$$

   De même on a

   $$Q(1) = P(0)L_0(1) + P(1)L_1(1) + P(2)L_2(1) = P(1)$$

   et $Q(2) = P(2)$.
   P et Q étant des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, d'après la question 1, ces deux polynômes sont bien égaux.

   Tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit donc comme combinaison linéaire de L_0, L_1, L_2 : cette famille est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Indispensables de la question :

   - Se mettre en situation d'appliquer la question 1 en introduisant le bon polynôme.
   - Vérifier qu'on est dans les conditions d'application de cette question (notamment : $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$).
   - Bien formuler la propriété de famille génératrice.

---

4. **Montrer que** (L_0, L_1, L_2) **est une base de** $\mathbb{R}_2[X]$**. Déterminer les coordonnées du polynôme** $P = X$ **dans cette base.**

   $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ et (L_0, L_1, L_2) est une famille génératrice de 3 polynômes : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   En appliquant l'égalité de la question précédente au polynôme $P = X$ (donc $P(0) = 0, P(1) = 1, P(2) = 2$) :

$$X = L_1 + 2L_2$$

   Indispensables de la question :

   - Famille génératrice de cardinal $= \dim(\mathbb{R}_2[X])$ (NB : on pouvait aussi montrer la liberté, mais c'était moins habile.)
   - Ne pas confondre « cardinal » et « dimension » .
   - Se référer à la question précédente pour les coordonnées.

---

5. **Soient** $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ **quelconques. Déterminer un polynôme** $R \in \mathbb{R}_2[X]$ **(qu'on exprimera en fonction des** L_i**) tel que** $R(0) = a$**,** $R(1) = b$**,** $R(2) = c$**. Montrer que ce polynôme est unique.**

   La famille (L_0, L_1, L_2) étant une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut chercher ce polynôme sous la forme $R = \lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$. Alors en identifiant les valeurs en 0, on obtient

$$R(0) = \lambda_0 L_0(0) + \lambda_1 L_1(0) + \lambda_2 L_2(0)$$

   soit $a = \lambda_0$. De même on montre que $\lambda_1 = b$ et $\lambda_2 = c$. On obtient finalement :

$$R = aL_0 + bL_1 + cL_2$$

   Enfin, si deux polynômes R_1 et R_2 répondent aux conditions, ils vérifient $R_1(0) = R_2(0)$, $R_1(1) = R_2(1)$, $R_1(2) = R_2(2)$; donc ils sont égaux d'après la question 1. Il y a donc bien unicité.

   Indispensables de la question :

   - Justifier qu'on peut chercher R en fonction des L_i car ces derniers forment une base.
   - Obtenir les bonnes coordonnées avec les évaluations en $0, 1, 2$.
   - Connaître le schéma d'une démo d'unicité et le mener correctement avec la question 1.
