ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

DS n°1

30/09/2020
Durée : 4h

Exercice 1

1. On note I_n la matrice identité d'ordre n.
   $A = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = I_n \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Justifier.

2. Écrire la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $\mathcal{B} = \left\{X^2, X^2+X, X^2+X+1\right\}$ est également une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées du polynôme $P = 3X - 7$ dans $\mathcal{B}$ (on les rangera dans une colonne).

Exercice 2

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; et Φ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \Phi(M) = AM - MA$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pour $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calculer $\Phi(M)$.

3. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(\Phi)$, et donner sa dimension. Φ est-elle injective ?

5. Déterminer la dimension de $\operatorname{Im}(\Phi)$, et une base de cet espace.

6. Soit $\Psi : M \mapsto A^2M - MA^2$. Montrer que $\operatorname{Ker}(\Phi) \subset \operatorname{Ker}(\Psi)$.

Exercice 3 (Informatique)

Dans tout ce qui suit on supposera effectués les imports suivants :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

On s'intéresse à un problème de collection de cartes Pokémon.
On suppose qu'il existe en tout N cartes Pokémon distinctes ; pour alimenter sa collection on peut acheter des paquets de n vignettes. On suppose que les vignettes d'un même paquet sont 2 à 2 distinctes. On souhaite modéliser informatiquement cette situation, et estimer combien de paquets on doit acheter en moyenne pour posséder la collection complète.
Dans tout ce qui suit, les N cartes de la collection seront numérotées de 0 à $N-1$.

1. **Génération aléatoire d'un paquet de n cartes 2 à 2 distinctes.**
On cherche ici, selon notre modélisation, à générer une liste aléatoire de n entiers de $[\![0, N-1]\!]$, deux à deux distincts, dans laquelle tout entier apparaît de manière équiprobable.
Programmer une fonction `paquet(n,N)` effectuant ceci de la manière suivante, en supposant que ceci répond bien aux contraintes :

    - On initialise un « paquet » vide sous la forme d'une liste `M` vide ;
    - On génère la liste `L=[0,1,2,...,N-1]`
    - On répète n fois l'opération consistant à choisir aléatoirement un élément de `L`, à l'ajouter à `M` puis à l'enlever de `L`.

2. On cherche maintenant à modéliser l'évolution de la collection. Dans le code à compléter ci-dessous, la liste `collection` sera constituée de `0` et de `1` ; `collection[i]` vaudra 1 si et seulement si le collectionneur est en possession de la carte `i`.
Compléter le code suivant, qui renvoie le nombre de paquets à acheter pour avoir la collection complète des cartes Pokémon :

```
def temps_obtention(n,N):
    collection = ......
    obtenues = ... # nombre de cartes dans la collection
    nb_paquets = ... # nombre de paquets achetés
    while .... :
        p = paquet(n,N)
        nb_paquets = ...
        for carte in p:
            .... # si la carte n'a pas été obtenue précédemment
            .... # on l'ajoute à la collection
            .... # et on ajuste le compteur de cartes obtenues
    return ...
```

3. On utilise une version modifiée du code précédent pour afficher l'évolution du nombre de cartes dans la collection au cours du temps, jusqu'à obtention de la collection complète.
On affiche ainsi une liste `evolution` dont le terme d'indice k est le nombre de cartes en possession du joueur après l'achat de k paquets.
Pour $N = 20$ et $n = 4$, on obtient une des trois sorties suivantes : laquelle ? Justifier votre réponse.

```
[0, 4, 8, 10, 12, 16, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 19, 19, 19, 20]
```

```
[0, 3, 3, 10, 12, 13, 14, 14, 19, 19, 19, 19, 20]
```

```
[1, 4, 7, 8, 11, 10, 13, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 20]
```

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1)$$

Partie I : Étude de l'endomorphisme f

1. Justifier que A n'est pas inversible. Qu'en déduire sur f ? Et sur $\mathrm{Ker}(f)$?

2. Donner les réels λ et μ tels que : $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = \mu v$.

3. Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation :

$$f(t) = t + v$$

4. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, telle que la famille $\mathscr{C} = \{u, v, w\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ soit la matrice

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Déterminer une matrice P telle que $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions 6 et 7 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f$$

6. Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

7. On note N la matrice de g dans la base $\mathscr{C} = \{u, v, w\}$ définie à la question 4.
Justifier que :

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

où a, e, f sont des réels.

8. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$?

Indication : Utiliser les matrices de f et g dans la base $\mathscr{C} = \{u, v, w\}$ définie à la question 4.

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients valent 0 ou 1.

1. $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2. Donner le nombre d'éléments de $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$.

On considère $n \geqslant 2$, et on se place sur l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$; on suppose que $u \circ u = \mathrm{Id}$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.
On note :

- $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$
- $p = \dim(\mathrm{F})$ et $q = \dim(\mathrm{G})$.

3. Montrer que : $x \in \mathrm{F} \Leftrightarrow u(x) = -x$; et que : $x \in \mathrm{G} \Leftrightarrow u(x) = x$.

4. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est inclus dans F.

5. En déduire que $p+q \geqslant n$ (on pourra appliquer le théorème du rang à un endomorphisme bien choisi).

On suppose désormais que $p=q$. Soit $(f_1,\dots,f_p)$ une base de F, et $(g_1,\dots,g_p)$ une base de G.

6. Montrer que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_\mathrm{E}\}$.
7. Montrer que $\left(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_p\right)$ est libre ; en déduire que $2p=n$, puis que $\left(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_p\right)$ est une base de E.
8. Montrer que la famille $\left(g_1+f_1,g_1-f_1,g_2+f_2,g_2-f_2,\dots,g_p+f_p,g_p-f_p\right)$ est aussi une base de E.
9. Montrer que la matrice de u dans cette dernière base appartient à $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$.