ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Programme de colle n°3
Semaine du 02/10

Algèbre linéaire

Pour cette semaine, tous les exercices étoilés de la feuille de TD2 sont exigibles.

Espaces vectoriels

Reprise des programmes précédents.

Applications linéaires

f désigne une application linéaire de E dans F.

- Définition de la linéarité. Conséquences immédiates : $f(0_E) = 0_F$; l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.
- Vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
- Noyau et image d'une application linéaire. Ce sont des sev, respectivement de E et de F.
  Noyau et image d'une matrice.
- $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Matrice d'une application linéaire. Méthode de construction de cette matrice. Utilisation de cette matrice (calcul d'images par f, recherche du noyau, etc.).
  Les étudiants doivent savoir passer des vecteurs aux coordonnées, et réciproquement, pour mener de tels calculs.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Propriétés : matrice de $f \circ g$, de f^n, de f^{-1}. $f \in \mathscr{L}(E)$ est un automorphisme ssi sa matrice dans une base quelconque est inversible.
- Matrice de passage, formule de changement de base.
- Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Conséquence : entre espaces de même dimension (et en particulier pour les endomorphismes), injectivité $\Leftrightarrow$ bijectivité, et surjectivité $\Leftrightarrow$ bijectivité.
  Le rang de f est celui de sa matrice dans des bases quelconques.
  $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi elle est de rang n.

  NB : le théorème du rang sur une matrice n'est pas au programme ; il faut se ramener à l'application linéaire canoniquement associée.