DS 1

Corrigé

Exercice 1

1. Si on note O_n la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$:

$O_n^2 = O_n \neq I_n$ donc $O_n \notin A$

Ce qui suffit à conclure que $\boxed{A \text{ n'est pas un sev de } M_n(\mathbb{R})}$

2. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est : $\{1, X, X^2\}$.

Soit $\mathcal{B} = \{X^2, X^2+X, X^2+X+1\}$.

* Card $\mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ ssi c'est une famille libre.

* Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tq :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 (X^2 + X) + \lambda_3 (X^2 + X + 1) = 0$$

On a : $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) X^2 + (\lambda_2 + \lambda_3) X + \lambda_3 = 0$

D'où en identifiant les coefficients :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne immédiatement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\mathcal{B}$ est libre : $\boxed{\text{c'est donc une base de } \mathbb{R}_2[X]}$

Les coordonnés dans $\mathcal{B}$ de $P = 3X-7$ sont les réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 (X^2+X) + \lambda_3 (X^2+X+1) = 3X-7$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2 + (\lambda_2+\lambda_3)X + \lambda_3 = 3X-7$$

d'où, toujours par identification :

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 = 3 \\ \lambda_3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2-\lambda_3 = -10+7 = \underline{-3} \\ \lambda_2 = 3-\lambda_3 = \underline{10} \\ \lambda_3 = \underline{-7} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ est la colonne des coordonnés dans } \mathcal{B} \text{ de } 3X-7}$$

Exercice 2

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\qquad\qquad M \longmapsto AM - MA$

1. • Φ va bien de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

• $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A \\ &= \lambda AM + AN - (\lambda MA + NA) \\ &= \lambda(AM - MA) + (AN - NA) \\ &= \underline{\lambda \Phi(M) + \Phi(N)}\end{aligned}$$

donc Φ est linéaire

$\boxed{\Phi \text{ est donc bien un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

2. Avec $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$: $AM = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2z & -y+2t \\ 2x+4z & 2y+4t \end{pmatrix}$

$MA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y & 2x+4y \\ -z+2t & 2z+4t \end{pmatrix}$

D'où en soustrayant :

$$AM - MA = \begin{pmatrix} 2z - 2y & +2t - 2x - 5y \\ 2x + 5z - 2t & 2y - 2z \end{pmatrix} = \Phi(M)$$

3. On tire de la question précédente :

$$\Phi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-2&-5\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&0\\5&-2\end{pmatrix}$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{\mathrm{Mat}(\Phi, B_c)=\begin{pmatrix}0&-2&2&0\\-2&-5&0&2\\2&0&5&-2\\0&2&-2&0\end{pmatrix}}$

4. On repart de l'expression de 2°) :

$$M=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}\,\Phi \iff \Phi(M)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}-2y+2z=0\\-2x-5y+2t=0\\2x+5z-2t=0\\2y-2z=0 \quad L_4=-L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}y=z\\-2x-5y+2t=0\\2x+5y-2t=0 \quad L_3=-L_2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}y=z\\x=t-5/2\,y\end{cases} \iff \begin{cases}x=-5/2\,z+t\\y=z\end{cases}$$

d'où $\mathrm{Ker}(\Phi)=\left\{\begin{pmatrix}-5/2\,z+t&z\\z&t\end{pmatrix}\;\middle|\;(z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}=\boxed{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-5/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)}$

Ces deux matrices sont non colinéaires, donc forment 1 famille libre, donc une base de $Ker(\Phi)$

On en déduit $\boxed{\dim(Ker(\Phi)) = 2}$

et comme $Ker(\Phi) \neq \{0\}$ $\boxed{\Phi \text{ n'est pas injective}}$

5. D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))}_{=4} = \underbrace{\dim Ker\, \Phi}_{=2} + \dim Im\, \Phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim Im(\Phi) = 2}$$

Dès lors, toute famille libre à 2 vecteurs de $Im(\Phi)$ en constitue une base :

On a donc, avec les calculs de 3°), que

$$\boxed{\left\{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} \text{ est une base de } Im(\Phi)}$$

6. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\Phi)$: on a alors $AM - MA = 0$ ou encore $AM = MA$.

Alors :
$$\begin{aligned}\Psi(M) &= A^2M - MA^2 \\ &= A(AM) - (MA)A \\ &= A(MA) - (AM)A \\ &= 0 \qquad \Rightarrow M \in \mathrm{Ker}(\Psi)\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \mathrm{Ker}(\Psi)}$

Exercice 3

1.
```
def paquet(n, N):
    M = []                          # init. d'une liste vide
    L = list(range(N))              # L = [0, ..., N-1]
    for k in range(n):
        i = rd.randint(N)           # i aléatoire ∈ {0, ..., N-1} est la pos° de l'élément de L choisi
        M.append(L[i])
        del L[i]
    return M                        # on renvoie le "paquet" M ainsi créé.
```

2.
```
def temps_obtention(n, N):
    collection = np.zeros(N)        # initialement on n'a aucune carte, donc collection ne comporte que des "0"
    obtenus = 0                     # compteur de cartes obtenues
    nb_paquets = 0                  # — du nb de paquets achetés
    while obtenus < N:              # tant qu'on n'a pas les N cartes
        p = paquet(n, N)
        nb_paquets = nb_paquets + 1 # achat d'un nouveau paquet
```

```
def
    while
        for carte in p:
            if collection[carte] == 0:
                collection[carte] = 1
                obtenues = obtenues + 1
    return nb_paquets
```

← on doit renvoyer le nb de paquets achetés.

3. La sortie 2 est incorrecte car on passe, en un paquet de 4 cartes, de 3 à 10 cartes dans la collection.

La sortie 3 est incorrecte car au début on a déjà 1 carte ! (ou, car à l'achat d'un paquet, la collect° se réduit de 11 à 10 cartes !)

$\boxed{\text{La sortie 1 est donc la bonne.}}$

Exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad u = (0, 1, -2) \qquad v = (0, 1, -1)$$

1°) Si on note C_i les colonnes de A, $\underline{C_2 = 2C_3}$ donc $\underline{A \text{ n'est pas inversible}}$

Comme f est canoniq^t associé à A $\boxed{f \text{ n'est pas un automorphisme}}$

et $\boxed{Ker(f) \neq \{0\}}$

2°) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f((x, y, z)) = (x, x+2y+z, 2x-2y-z)$$

d'où $f((0, 1, -2)) = (0, 0, 0) = 0 \times u \Rightarrow \underline{\lambda = 0}$

$f((0, 1, -1)) = (0, 1, -1) = v \Rightarrow \underline{\mu = 1}$

3°) Avec $t = (x, y, z)$: $f(t) = (x, x+2y+z, 2x-2y-z)$

$t + v = (x, y+1, z-1)$

On cherche donc à résoudre : $\begin{cases} x = x \\ y+1 = x+2y+z \\ z-1 = 2x-2y-z \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-2y-2z=-1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ -4y-4z=-3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=3/4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1-y-z=1-(3/4-z)-z=1/4 \\ y=3/4-z \end{cases}$$

d'où $\boxed{t=(1/4,\ 3/4-z,\ z) \text{ où } z\in\mathbb{R} \text{ est quelconque}}$

4°) On cherche donc $\{u, v, w\}$ tq (en lisant la matrice !)

$$f(u)=0$$
$$f(v)=v$$
$$f(w)=v+w$$

w vérifie l'équat° de la question précédente, donc $w=(1/4,\ 3/4-z,\ z)$ avec $z\in\mathbb{R}$

On demande la 3° coordonnée nulle, donc $\underline{\underline{z=0}}$

et $\underline{w=(1/4,\ 3/4,\ 0)}$

Il reste à vérifier que

$$\{(0,1,-2),(0,1,-1),(1/4,3/4,0)\}$$ est une base de $\mathbb{R}^3$;

donc qu'elle est libre (car elle contient $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs)

Le système $\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = (0,0,0)$ donne rapidement

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\{u, v, w\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ répondant à la question.}}$

5. Par formule du chgt de base, P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{C}$

(en effet : $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_c)$
$T = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{C})$)

On sait alors la construire : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 1 & 3/4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Partie II

6. Si $g \circ g = f$, $f \circ g = (g \circ g) \circ g = g^3$ et $g \circ f = f \circ (g \circ g) = g^3$ d'où $\boxed{f \circ g = g \circ f}$

7. $= \mathrm{Mat}(f,$

et $N = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{E})$

Si $f \circ g = g \circ f$ on a alors $TN = NT$.

Avec $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$NT = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & b+c \\ 0 & e & e+f \\ 0 & h & h+i \end{pmatrix}$$

$$\text{et } TN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$NT = TN \iff \begin{cases} b = 0 \\ b+c = 0 \\ d+g = 0 \\ e = e+h \\ f+i = e+f \\ g = 0 \\ h+i = i \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ g = -d = 0 \\ h = 0 \\ e = i \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

d'où $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ avec a, e, f réels.

8. Ceci isole les " candidats " : une ma

si $g \circ g = f$, $\mathrm{Mat}(g, \mathcal{C})$ est de la forme de 7°)

Réciproq^t, soit $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$: ~~[illegible]~~

$$\underline{g \circ g = f \iff N^2 = T}$$

Avec $N^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 2ef \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$

On a $N^2 = T \iff \begin{cases} a^2 = 0 \\ e^2 = 1 \\ 2ef = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ e = 1 \text{ ou } e = -1 \\ f = 1/2e \end{cases}$

On trouve 2 matrices N :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si on note g_1 et g_2 les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tels que

$\mathrm{Mat}(g_1, \mathcal{C}) = N_1$

et $\mathrm{Mat}(g_2, \mathcal{C}) = N_2$

$\boxed{g_1 \text{ et } g_2 \text{ sont les seuls endos. tq } g \circ g = f}$

Exercice 5

1. Non ! Par exemple avec $n=2$

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{B}_2(\mathbb{R})$$

mais $2B=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\notin\mathcal{B}_2(\mathbb{R})$.

2. Les matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices à n^2 coefficients valant 0 ou 1.

Il y a donc 2^{n^2} choix pour construire une telle matrice

(2 choix : 0 ou 1 par coefficient)

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{B}_n(\mathbb{R}))=2^{n^2}}$$

3. $x\in F \iff x\in \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id})$

$\iff (u+\mathrm{Id})(x)=0$

$\iff u(x)+x=0$

$\iff \underline{u(x)=-x}$

$x\in G \iff x\in\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$

$\iff u(x)-x=0$

$\iff \underline{u(x)=x}$

4. Soit $x\in \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$: $\exists y\in E$ tq $x=(u-\mathrm{Id})(y)=u(y)-y$

Montrons alors que $x\in F=\mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id})$

$$(u+\mathrm{Id})(x)=u(x)+x=u\big(u(y)-y\big)+u(y)-y$$

$$=\underbrace{u^2}_{=\mathrm{Id}}(y)-\cancel{u(y)}+\cancel{u(y)}-y \quad \text{par linéarité}$$

$$=y-y=0 \quad \Rightarrow x\in F.$$

On a donc bien : $\boxed{\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) \subset F}$

5. $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) \subset F$

donc $\dim\left(\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})\right) \leq \dim(F)$ $\quad (*)$

Par théorème du rang sur $u-\mathrm{Id}$:

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})) + \dim \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$$
$$n = \dim \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) + \dim(G)$$

$\Rightarrow \underline{\dim \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) = n - \dim G}$

d'où en reportant dans $(*)$:

$n - \dim(G) \leq \dim(F)$

$\Rightarrow \dim F + \dim G \geq n \qquad \Rightarrow \boxed{p+q \geq n}$.

6. Soit $x \in F \cap G$

$\left.\begin{array}{l} x \in F \text{ donc } u(x) = -x \\ x \in G \text{ donc } u(x) = x \end{array}\right)$ q. 3°) $\qquad \Rightarrow \boxed{F \cap G = \{0\}}$.

On en déduit $x = -x$, puis $\underline{\underline{x = 0}}$

7. Vu en TD.

Soient des λ_i et μ_i tels que

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_p g_p = 0$$

Alors $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = -\mu_1 g_1 - \dots - \mu_p g_p$

et si on note ce vecteur α : $\alpha \in \mathrm{Vect}(f_i) = F$

$\alpha \in \mathrm{Vect}(g_i) = G$

$\Rightarrow \alpha \in F \cap G$

$\Rightarrow \alpha = 0$

donc $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = 0$

et $\mu_1 g_1 + \dots + \mu_p g_p = 0$

d'où on tire, par liberté de (f_i) et (g_i), que tous les λ_i et les μ_i sont nuls

$\Rightarrow (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_p)$ est libre.

Cette famille contient $2p$ vecteurs. Comme on est en dimension n :

$2p \leqslant n$; mais on a vu en 5°) que $2p \geqslant n$.

$\Rightarrow 2p = n$

et $\mathrm{Card}(f_1, \dots, g_p) = n = \dim(E)$ $\Rightarrow$ C'est une base de E

8. Cette famille est également de cardinal $2p = n$: montrons qu'elle est libre.

Soient $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_p, \mu_p$

tq $\lambda_1(g_1+f_1) + \mu_1(g_1 - f_1) + \dots + \lambda_p(g_p+f_p) + \mu_p(g_p-f_p) = 0$

En réorganisant :

$$(\lambda_1+\mu_1)g_1 + (\lambda_1-\mu_1)f_1 + \dots + (\lambda_p+\mu_p)g_p + (\lambda_p-\mu_p)f_p = 0$$

et on en déduit, par liberté de $(f_1, \dots, f_p, g_1 \dots g_p)$:

$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\begin{cases} \lambda_i + \mu_i = 0 \\ \lambda_i - \mu_i = 0 \end{cases}$ d'où $\underline{\lambda_i = \mu_i = 0}$

La famille proposée est bien libre : c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

9. Calculons les images par u des vecteurs de cette base.

On rappelle : $\forall i$, $f_i \in F$ donc $u(f_i) = -f_i$
$g_i \in G$ donc $u(g_i) = g_i$

Alors : $u(g_1+f_1) = u(g_1) + u(f_1) = g_1 - f_1$
$u(g_1-f_1) = u(g_1) - u(f_1) = g_1 + f_1$

et de même pour $\forall i \in \{2, \dots, p\}$.

La matrice de u aura donc la forme :

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u(g_1+f_1) & u(g_1-f_1) & & \cdots & u(g_p+f_p) & u(g_p-f_p) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\
 & & 0 & 0 & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} g_1+f_1 \\ g_1-f_1 \\ g_2+f_2 \\ g_2-f_2 \\ \vdots \\ g_p+f_p \\ g_p-f_p \end{array}
\end{array}
$$

et on voit bien que ts les coefficients de cette matrice sont ds $\{0,1\}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{cette matrice appartient à } B_n(\mathbb{R})}$